

# IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. X, N. 10

Serie nona

1° Ottobre 1953

## Correlazione angolare nelle cascate $\gamma\text{-}\gamma$ del $^{214}_{84}\text{Po}$ .

F. DEMICHELIS e R. MALVANO

*Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico - Torino*

(ricevuto il 20 Giugno 1950)

**Riassunto.** — È stata studiata la correlazione angolare nelle cascate  $\gamma\text{-}\gamma$  dovute al decadimento del  $^{214}_{84}\text{Po}$ . Ad essa contribuiscono almeno due tipi diversi di cascate. In base ai risultati sperimentali si è discusso sull'attribuzione della parità e del momento angolare a livelli energetici eventualmente interessati nelle cascate stesse.

### 1. — Premessa.

Da lavori precedenti di E. RUTHERFORD e collaboratori <sup>(1)</sup> la presenza di cascate  $\gamma\text{-}\gamma$  nel  $^{214}_{84}\text{Po}$  si poteva considerare acquisita sia pure attraverso considerazioni di carattere indiretto.

Il decadimento del  $^{214}_{84}\text{Po}$  è notevolmente complesso, sicchè si può ritenere che solo recentemente <sup>(2)</sup> si siano potute individuare, in modo soddisfacente, le cascate esistenti, determinando le energie dei raggi  $\gamma$  che costituiscono le cascate e, entro certi limiti, le intensità relative.

I momenti angolari di un certo numero di livelli eccitati sono stati proposti da E. RUTHERFORD e collaboratori, a conclusione di considerazioni teorico-sperimentali; non ci risulta che a quei valori abbia poi corrisposto un controllo sperimentale diretto.

Essi lasciavano prevedere, in accordo con le considerazioni teoriche oggi ammesse, l'esistenza di correlazione angolare nelle cascate (fig. 1).

<sup>(1)</sup> E. RUTHERFORD, W. B. LEWIS e B. V. BOWDEN: *Proc. Roy. Soc.*, A **142**, 347 (1933).

<sup>(2)</sup> F. DEMICHELIS e R. MALVANO: *Nuovo Cimento*, **10**, 405 (1953).

Il nostro interesse per la loro osservazione diretta era quindi ben giustificato; sicchè già in esperienze precedenti sono state condotte misurazioni di correlazione angolare su cui si è riferito in <sup>(3)</sup>.

Stabilite le cascate con l'approssimazione che i mezzi sperimentali ci permettevano, si è ripreso con un nuovo e più accurato dispositivo lo studio della correlazione angolare con risultati <sup>(4)</sup> che confermano e perfezionano quelli semplici già indicati; su questi risultati desideriamo qui riferire.

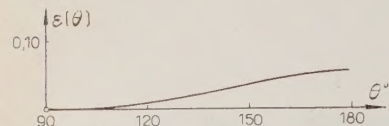


Fig. 1. - Correlazione angolare teorica totale delle cascate  $\gamma$ - $\gamma$  del  $^{214}\text{Po}$  secondo lo schema di E. RUTHERFORD e coll.

gano emessi in direzioni formanti tra di loro un certo angolo  $\theta$  è proporzionale a

$$(1) \quad W(\theta) = 1 + \sum_i \alpha_i a_{i1} \cos^2 \theta + \sum_i \alpha_i a_{i2} \cos^4 \theta,$$

dove  $a_{i1}$  e  $a_{i2}$  sono i coefficienti relativi a ciascun tipo di cascata, cioè relativi a una cascata individuata dal tipo di transizione e dal valore del momento angolare dei tre livelli energetici interessati (fig. 2), e  $\alpha_i$  è proporzionale alla probabilità di emissione relativa alla  $i$ -esima cascata.

Scopo della nostra ricerca era dunque la determinazione di  $a_{i1}$  e  $a_{i2}$ , cioè dei tipi di cascata e delle relative intensità  $\alpha_i$ .

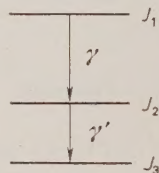


Fig. 2.

## 2. - Dispositivo sperimentale.

Il dispositivo sperimentale consiste di due contatori a scintillazione  $F_1$  e  $F_2$  (fig. 3), costituiti da cristalli di NaI(Tl) seguiti da fotomoltiplicatori 1P21 e del circuito a coincidenze  $C$  il cui tempo di risoluzione è  $\tau = 1,62 \cdot 10^{-7}$  s.  $N_c$  conta il numero totale di coincidenze,  $N_1$  e  $N_2$  contano il numero dei raggi  $\gamma$  sentiti rispettivamente da  $F_1$  e  $F_2$ . In fig. 4 a), b) si può osservare il complesso degli apparecchi costituenti il dispositivo sperimentale.

<sup>(3)</sup> F. DEMICHELIS e R. MALVANO: *Nuovo Cimento*, **9**, 1106 (1952).

<sup>(4)</sup> F. DEMICHELIS e R. MALVANO: *Phys. Rev.* (in corso di stampa).

<sup>(5)</sup> C. D. ELLIS e G. H. ASTON: *Proc. Roy. Soc., A* **129**, 180 (1930); C. D. ELLIS: *Proc. Roy. Soc., A* **143**, 350 (1935); G. D. LATYSHEV: *Rev. Mod. Phys.*, **19**, 132 (1947).

La tensione totale ai fotomoltiplicatori venne fissata e limitata a 950 V, tensione sufficiente e favorevole ad una buona rivelazione delle scintillazioni generate dai raggi  $\gamma$  nei cristalli.

La sorgente  $S$  (bromuro di radio in equilibrio con i suoi sottoprodotti) aveva una attività di  $\approx 20$  microcurie ed era racchiusa in un piccolissimo

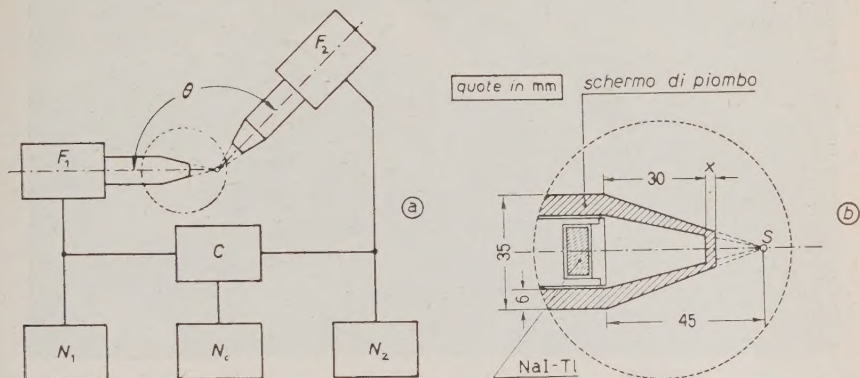


Fig. 3. - Dispositivo sperimentale.

recipiente di vetro avente un volume di  $\approx 35 \text{ mm}^3$ , di cui la sorgente occupava  $\approx 1/5$ . La piccola intensità della sorgente era giustificata dal fatto di dare un numero di disintegrazioni all'unità di tempo dell'ordine di grandezza dell'inversa del tempo di risoluzione. Si riesce in questo modo ad ottenere un buon rapporto tra la frequenza delle coincidenze effettive  $n_e$ , cioè relative a una coppia di raggi  $\gamma$  e la frequenza delle coincidenze puramente accidentali  $n_a$ .

Se  $n$  è la frequenza delle coincidenze totali misurate,  $n_e$  risulta uguale a

$$n_e = n - n_a = n - 2\tau n_1 \cdot n_2,$$

dove  $n_1$  e  $n_2$  sono le frequenze dei raggi  $\gamma$  contati rispettivamente da  $N_1$  e  $N_2$ .

Come si può osservare nella fig. 3, gli scintillatori erano opportunamente schermati e la sorgente era disposta, rispetto ai cristalli scintillatori, in modo da evitare il più possibile le coincidenze spurie dovute ai fotoni Compton diffusi da ciascun cristallo scintillatore <sup>(6)</sup>.

<sup>(6)</sup> M. DEUTSCH: *Rept. Phys. Soc. Progress Phys.*, **14**, 196 (1951).



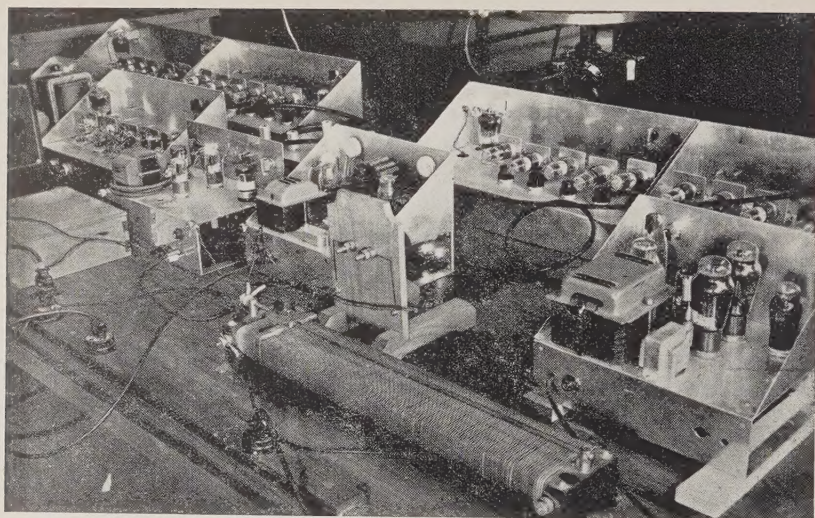


Fig. 4 a).

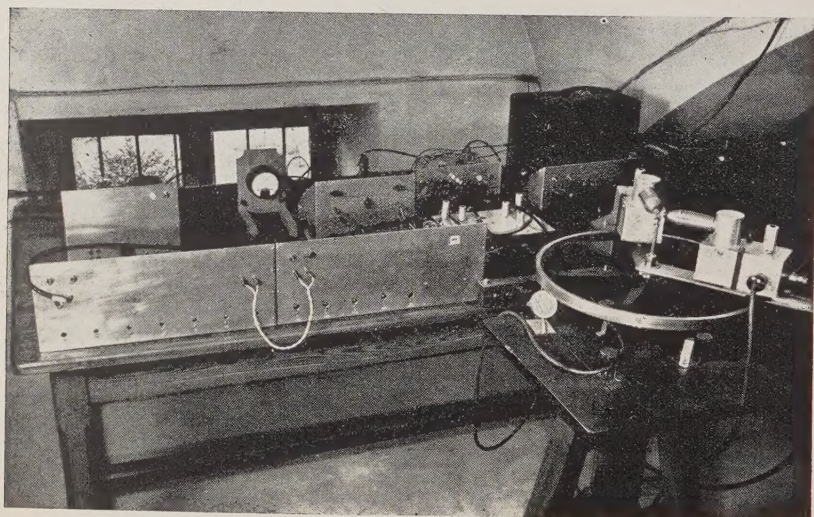


Fig. 4 b).

### 3. - Misurazioni.

A prova del nostro dispositivo sperimentale e a conferma della buona schermatura e della buona simmetria nella disposizione geometrica, fu determinata la correlazione angolare del  $^{60}_{28}\text{Ni}$ , ormai ben nota, e furono trovati risultati in accordo (entro i nostri errori sperimentali) con i risultati trovati da altri ricercatori (<sup>7</sup>).

Le misurazioni di coincidenze furono fatte per  $\theta = 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ , e, allo scopo di determinare quale contributo ciascun tipo di cascata desse alla correlazione angolare totale, furono fatte misure di coincidenze per i vari angoli e per assorbitori di piombo aventi rispettivamente spessore  $x = 1$  mm,  $x = 4$  mm,  $x = 7$  mm.

Il numero dei raggi  $\gamma$  sentiti da ciascun fotomoltiplicatore è risultato costante, entro gli errori statistici, per qualsiasi posizione relativa dei due ricevitori; detto numero si è mantenuto costante per entrambi i rivelatori. Lente variazioni nella efficienza della rivelazione dei raggi  $\gamma$  durante lo sviluppo delle misurazioni, in un tempo dell'ordine di mesi, non superarono il 10%.

Piccole asimmetrie nella posizione della sorgente possono influenzare la misura della correlazione angolare, però tale effetto sarà lo stesso di quello osservato nelle frequenze di conteggio date da  $N_1$  e  $N_2$ . Per ovviare a questo inconveniente la frequenza delle coincidenze totali  $n$  fu sempre divisa per il prodotto  $n_1 \cdot n_2$  correggendo in questo modo, almeno in prima approssimazione, le variazioni dovute al cambiamento di efficienza dei rivelatori e a residui effetti di diffusione Compton.

Alcune misurazioni furono ripetute, per controllo, a distanza di tempo (ad esempio, circa un mese); furono ritrovati gli stessi risultati, s'intende entro gli errori statistici.

Per ogni angolo e per ogni spessore furono ottenute in media  $\approx 20\,000$  coincidenze totali pari a  $\approx 7\,000$  coincidenze effettive.

Il numero di coincidenze effettive ad unità di tempo variava da  $\approx 10/\text{min}$  per  $x = 1$  mm a  $\approx 3/\text{min}$  per  $x = 7$  mm.

### 4. - Risultati sperimentali.

In fig. 5 sono riportati i punti sperimentali, con i relativi errori probabili, per gli spessori  $x = 1$  mm,  $x = 4$  mm,  $x = 7$  mm. Le ascisse rappresentano l'angolo  $\theta$ , le ordinate rappresentano

$$\varepsilon(\theta) = (n_{e,\theta} / n_{e,90^\circ}) - 1 = W(\theta) - 1,$$

(<sup>7</sup>) E. L. BRADY e M. DEUTSCH: *Phys. Rev.*, **78**, 558 (1950).



dove  $n_{e,\theta}$  e  $n_{e,90^\circ}$  sono le frequenze delle coincidenze effettive rispettivamente agli angoli  $\theta$  e  $90^\circ$ , e  $w(\theta)$  è la funzione definita in (1).

I punti sperimentali indicano curve di correlazione angolare che sono effettivamente diverse tra di loro e da questo fatto si può dedurre che le varie cascate devono appartenere ad almeno due tipi diversi. L'esistenza infatti di cascate appartenenti a un solo tipo darebbe luogo a una correlazione angolare completamente indipendente dall'assorbimento.

Il comportamento qualitativo della correlazione angolare  $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$  per  $x = 1$  mm suggerisce che:

$\sum_i \alpha_i a_{i1}$  deve essere positiva,

$\sum_i \alpha_i a_{i2}$  deve essere negativa e molto piccola.

Se poi si osservano le  $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$  per  $x = 4$  mm e  $x = 7$  mm si deve ammettere che la prima sommatoria deve aumentare con lo spessore di piombo mentre la seconda deve diminuire.

## 5. - Interpretazione dei risultati sperimentali.

Se si suppone che lo stato finale delle varie cascate sia lo stato fondamentale (essendo il  $^{214}_{84}\text{Po}$  un nucleo pari-pari, tale stato fondamentale ha momento angolare  $J_I = 0$ ), se si tiene conto delle considerazioni precedenti, e

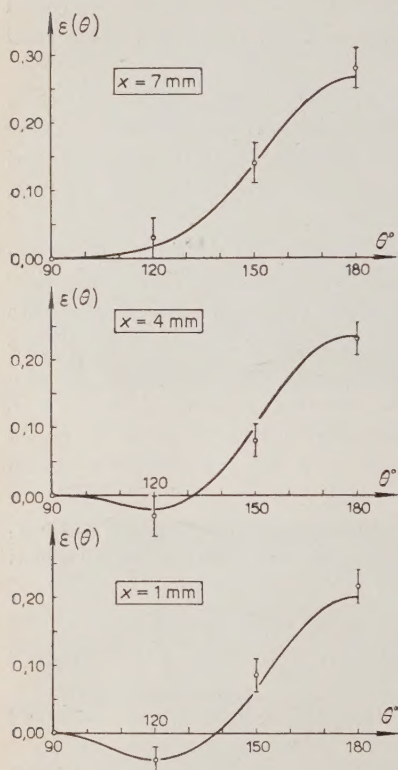


Fig. 5. - Curve sperimentali, per vari spessori di assorbitori, della correlazione angolare totale nelle cascate  $\gamma\text{-}\gamma$  del  $^{214}_{84}\text{Po}$ .

se ci si limita infine, almeno in un primo tempo, a considerare due soli tipi di cascate, si è in grado di fare uno studio sistematico della correlazione angolare in base ai valori delle coppie di coefficienti  $a_{i1}$ ,  $a_{i2}$  relativi ai vari tipi di cascata <sup>(8)</sup>.

Si è trovato allora che i coefficienti che più concordano con i dati speri-

<sup>(8)</sup> D. R. HAMILTON: *Phys. Rev.*, **56**, 122 (1940).

mentali e con valori ragionevoli delle intensità relative delle varie cascate sono i seguenti:

- $$\begin{aligned} 1) \quad & a_{11} = 3/7, \quad a_{12} = 0, \\ 2) \quad & a_{21} = -15/13, \quad a_{22} = 16/13. \end{aligned}$$

Le curve a tratto pieno di fig. 5 sono state tracciate in base alla (1) con i valori 1) e 2) dei coefficienti  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ . Le intensità relative  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , ottenute con il metodo dei minimi quadrati, sono riportate in funzione dello spessore  $x$  di assorbitore in fig. 6 (linee a tratto pieno); nella stessa figura le linee trat-

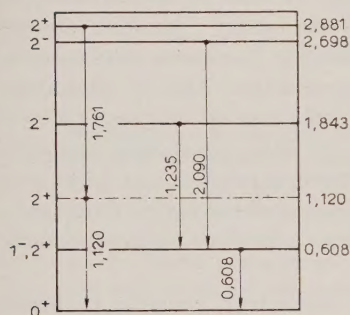


Fig. 6. - Intensità relativa delle cascate del  $^{214}_{84}\text{Po}$  in funzione dello spessore di assorbitore.

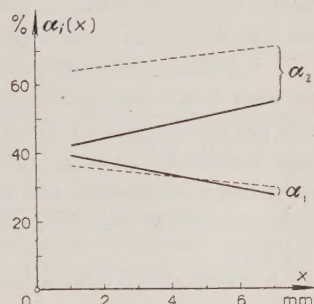


Fig. 7. - Schema parziale dei livelli del  $^{214}_{84}\text{Po}$  secondo J. SURUGUE e con momenti angolari e parità entrambi in buon accordo con le misure di correlazione angolare.

teggiate sono invece state ottenute assumendo come valori delle intensità relative quelli suggeriti nello schema di decadimento proposto da J. SURUGUE <sup>(9)</sup> (fig. 7).

Le cascate di tipo 1) e 2) consisterebbero dei seguenti raggi:

- $$\begin{aligned} 1) \quad & 1,120 \text{ MeV}, \quad 1,761 \text{ MeV}, \\ 2) \quad & \begin{cases} 0,608 \text{ MeV}, & 1,235 \text{ MeV}, \\ 0,608 \text{ MeV}, & 2,090 \text{ MeV}. \end{cases} \end{aligned}$$

Nello schema di fig. 7 compaiono i valori dei momenti angolari dei livelli interessati in base ai risultati del nostro studio. Si osserva che i due tipi di cascata da noi suggeriti consisterebbero:

la 1) di una transizione quadrupolo-dipolo con momenti angolari  $J_1 = 0^+$ ,  $J_2 = 1^-$ ,  $J_3 = 2^-$ , oppure di dipolo-quadrupolo con momenti angolari

<sup>(9)</sup> J. SURUGUE: *Journ. de Phys. et le Radium* (8), 7, 145 (1946).

$J_1 = 0^+$ ,  $J_2 = 2^+$ ,  $J_3 = 2^-$  per i tre stati in ordine di energia di eccitazione crescente;

la 2) di una transizione quadrupolo-quadrupolo con momenti angolari  $J_1 = 0^+$ ,  $J_2 = 2^+$ ,  $J_3 = 2^+$  ancora per i tre stati in ordine di energia di eccitazione crescente.

## 6. - Conclusioni.

Le conclusioni che si possono trarre dai risultati sperimentali riportati sono le seguenti:

— Mentre le intensità delle cascate del tipo 1) sono in ottimo accordo con i nostri risultati (sebbene si possa osservare che i raggi  $\gamma$  più duri interessanti tale tipo di cascata siano forse troppo penetranti), l'intensità della cascata di tipo 2) è lontana dalle previsioni teorico-sperimentali. Questo disaccordo potrebbe però venire spiegato ammettendo o l'esistenza di un terzo tipo di cascata di piccola intensità, o che il coefficiente  $3/7$  della correlazione angolare sia troppo grande di  $\approx 30\%$ . Effetti di interferenza prodotti dal fatto che una o entrambe le transizioni non siano nè puramente elettriche, nè puramente magnetiche potrebbero dar luogo a una tale diminuzione del valore del coefficiente  $a_{11}$  <sup>(10)</sup>.

— Una seconda conclusione estremamente suggestiva, riguarda il raggio  $\gamma$  di 0,608 MeV. E precisamente: se tale raggio  $\gamma$  fosse interessato nella cascata di tipo 2) esso dovrebbe essere non una transizione di dipolo elettrico, come è risultato da parecchie misure sul relativo coefficiente di conversione interna, ma invece una transizione di quadrupolo elettrico. Se questo fatto è vero e se questa transizione avviene dal primo stato eccitato allo stato fondamentale, si deve desumere che tale stato eccitato è un livello  $2^+$  in accordo con recentissimi lavori sui nuclei pari-pari <sup>(11)</sup>.

Ringraziamo vivamente il prof. E. PERUCCA per il suo costante interesse e per l'aiuto datoci nel corso di queste ricerche.

<sup>(10)</sup> D. S. LING e D. L. FALCOFF: *Phys. Rev.*, **74**, 1224 (1948).

<sup>(11)</sup> G. SCHARFF-GOLDHABER: *Physica*, **18**, 12, 1105 (1952); *Phys. Rev.* **90**, 587 (1953).

## SUMMARY

The angular correlation of the cascade  $\gamma$ -rays from the decay of  $^{214}_{84}\text{Po}$  has been studied by means of scintillation counters. Two different types of cascades give their contribution to the observed angular correlation. On the basis of our experimental results we have discussed on a plausible assignment of parities and angular momenta to the energy levels giving rise to the observed ray cascades.



# Teoria semiclassica della diffusione dei mesoni $\pi$ su nucleoni.

E. FABRI

*Istituto di Fisica dell'Università - Roma*  
*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma*

(ricevuto il 15 Luglio 1953)

**Riassunto.** — Si studia la diffusione di mesoni  $\pi$  su nucleoni mediante la naturale estensione del metodo di Pauli, e si discutono le approssimazioni introdotte. Poichè la carica non è quantizzata si presentano difficoltà nell'interpretazione del risultato, che vengono superate imponendo la corrispondenza con la teoria quantistica. Le sezioni d'urto così ottenute al limite perturbativo coincidono con quelle quantistiche; tuttavia con questo metodo non sembra possibile un accordo con i risultati sperimentali.

Il metodo classico di PAULI <sup>(1)</sup> è già stato impiegato in due lavori sullo scattering mesone-nucleone apparsi recentemente sulla *Physical Review* <sup>(2,3)</sup>. Le considerazioni che seguono, sebbene ispirate allo stesso metodo, differiscono da quelle degli autori citati nel procedimento seguito per distinguere i vari processi, che è, mi sembra, il punto più delicato della questione.

Poichè le notazioni usate sono alquanto diverse da quelle di PAULI, è opportuno riassumere rapidamente le formule principali.

La densità hamiltoniana del campo mesonico si scrive:

$$(1) \quad H^\mu = \frac{1}{2} \{ c^2 \pi_i \pi_i + \psi_u \psi_u + \mu^2 \psi_i \psi_i \}, \quad \left( \mu = \frac{mc}{\hbar} \right)$$

dove  $\psi_u = \partial \psi_i / \partial x_i$ , ed è sottintesa la somma sugli indici ripetuti ( $i, l = 1, 2, 3$ )

<sup>(1)</sup> W. PAULI: *Meson Theory of Nuclear Forces* (New York, 1946).

<sup>(2)</sup> D. FELDMAN: *Phys. Rev.* **88**, 890 (1952).

<sup>(3)</sup> W. W. WADA: *Phys. Rev.*, **88**, 1032 (1952).

Il termine di interazione è:

$$(2) \quad H' = \frac{g}{\mu} U \tau_i \sigma_l \psi_{il},$$

essendo  $U(\mathbf{x})$  il consueto fattore di forma, avente l'integrale spaziale uguale ad 1. Eseguendo la consueta trasformazione allo spazio degli impulsi si introducono le variabili  $q_i$ , e si hanno le equazioni del moto:

$$(0) \quad \ddot{q}_i(\mathbf{k}) + c^2(k_i k_l + \mu^2) q_i(\mathbf{k}) = \frac{ifc^2}{\mu} \sigma_i k_l V(\mathbf{k}) \tau_i,$$

$$(4) \quad \dot{\sigma}_i = 2\varepsilon_{ilr} \tau_j \sigma_r S_{jl},$$

$$(5) \quad \dot{\tau}_j = 2\varepsilon_{ijr} \tau_r \sigma_l S_{jl},$$

dove  $f = (2\pi)^{-3/2} \cdot g$ ,  $\varepsilon_{ilr} = \pm 1$  se  $i, l, r$  formano una permutazione pari o dispari di 1, 2, 3, rispettivamente e zero altrimenti. Inoltre:

$$(6) \quad S_{il} = \frac{if}{\hbar\mu} \int d\mathbf{k} \cdot k_i \bar{V}(\mathbf{k}) q_i(\mathbf{k}).$$

Se si fa una trasformazione di Fourier rispetto al tempo, secondo la formula:

$$(7) \quad \Omega(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Omega}(\omega) \exp[-i\omega t] d\omega,$$

si può risolvere la trasformata della (3) rispetto a  $\tilde{q}_i$ , ottenendo:

$$(8) \quad \tilde{q}_i^{(r)} = \frac{ifc^2}{\mu} \cdot \frac{k_i V(\mathbf{k})}{c^2(k_j k_j + \mu^2) - \omega^2} \int \tilde{\tau}_i(\omega') \tilde{\sigma}_i(\omega'') \delta(\omega' + \omega'' - \omega) d\omega' d\omega''.$$

L'indice  $^{(r)}$  mostra che si tratta del solo campo reattivo dovuto al moto di  $\sigma$  e  $\tau$ , mentre manca ancora l'onda incidente.

Dalla (8) si trae anche:

$$(9) \quad \tilde{S}_{il}^{(r)} = -\pi\gamma\chi_\omega \int \tilde{\tau}_i(\omega') \tilde{\sigma}_i(\omega'') \delta(\omega' + \omega'' - \omega) d\omega' d\omega'', \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{g^2}{\hbar c}.$$

Nella (9) si è posto:

$$(10) \quad \chi_\omega = \frac{c^3}{4\pi^3\mu^2} \int d\mathbf{k} \frac{K^2 G(K)}{c^2(K^2 + \mu^2) - \omega^2}, \quad \text{con} \quad K^2 = k_i k_i, \quad G(K) = |V(\mathbf{k})|^2.$$

Il calcolo dell'integrale è discusso completamente in <sup>(1)</sup>, pag. 16 e seguenti;



ha però un certo interesse mettere in rilievo le approssimazioni che vengono introdotte. In primo luogo (vedi <sup>(1)</sup>, pag. 17) si pone uguale ad 1 la trasformata di Fourier della  $U(\mathbf{x})$  ogni volta che essa compaia in un integrale convergente. Ciò può avere due interpretazioni: o l'estensione del nucleone è introdotta solo a scopo fenomenologico, ossia per far comparire l'inerzia di spin, che fornisce la larghezza della risonanza, ed allora non c'è alcuna ragione di conservare poi una  $V(\mathbf{k}) \neq 1$  nell'espressione della sezione d'urto; oppure si attribuisce alla  $U(\mathbf{x})$  un significato fisico, come potrebbe averlo in una teoria non locale, e allora porre  $V(\mathbf{k}) = 1$  negli integrali convergenti è lecito solo se il « raggio » del nucleone (la  $a$  di PAULI) è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda Compton del mesone, ossia, sempre con le notazioni di PAULI, se  $a\mu \ll 1$ . Quando passeremo a discutere i risultati dovremo ritornare su questo punto.

Per trattare la diffusione dei mesoni si impone un'onda incidente monocromatica, che porta ad  $\tilde{S}_{il}$  un contributo del tipo:

$$(11) \quad \tilde{S}_{il}^{(r)} = R_{il} \delta(\omega - \omega_0) + \bar{R}_{il} \delta(\omega + \omega_0), \quad \text{con } \omega_0 > c\mu.$$

$\tilde{S}_{il}$  risulta allora la somma di  $\tilde{S}_{il}^{(i)}$  ed  $\tilde{S}_{il}^{(r)}$ .

Con la trasformazione (7) le (4) e (5) divengono:

$$(12) \quad -i\omega\tilde{\sigma}_i = 2\varepsilon_{ir} \int \tilde{\tau}_r(\omega_1)\tilde{\sigma}_r(\omega_2)\tilde{S}_{il}(\omega_3)\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega)d\omega_1d\omega_2d\omega_3,$$

$$(13) \quad -i\omega\tilde{\tau}_i = 2\varepsilon_{ir} \int \tilde{\tau}_r(\omega_1)\tilde{\sigma}_i(\omega_2)\tilde{S}_{il}(\omega_3)\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega)d\omega_1d\omega_2d\omega_3.$$

La soluzione stazionaria che stiamo cercando deve divenire statica in assenza dell'onda incidente (almeno se si escludono isobari stabili, il che è giustificato dai valori che assumeremo per i parametri <sup>(4)</sup>). Pertanto se si sviluppano  $\tilde{\sigma}_i$  e  $\tilde{\tau}_i$  in serie dell'ampiezza dell'onda incidente, si trova che solo  $\tilde{\sigma}_i(0)$  e  $\tilde{\tau}_i(0)$  possono essere di ordine zero, mentre per qualunque valore di  $\omega$  diverso da zero il termine preponderante è di primo ordine almeno. Tenuto conto di ciò, si vede che nel secondo membro delle (12) e (13) i soli termini di primo ordine sono quelli con  $R_{il}$  (che ci sono solo se  $\omega = \omega_0$ ) ed altri proporzionali a  $\tilde{\sigma}_i(\omega)$  od a  $\tilde{\tau}_j(\omega)_0$ . Pertanto se  $\omega \neq \omega_0$ , le (12) e (13) al primo ordine risultano omogenee; quindi i termini di primo ordine di  $\tilde{\sigma}_i(\omega)$  e  $\tilde{\tau}_j(\omega)$  sono nulli salvo per  $\omega = \omega_0$ . Risolvendo le (12) e (13) appunto fino a termini del primo ordine si è portati dunque a trascurare anche le armoniche superiori, che risultano, come si è visto, almeno di ordine 2 nell'ampiezza dell'onda incidente. È abbastanza chiaro il significato fisico di quest'approssimazione: essa è una linearizzazione delle equazioni, e come tale permette di scrivere una sezione d'urto, che non avrebbe più senso se l'onda diffusa non avesse ampiezza pro-

<sup>(4)</sup> Vedi <sup>(1)</sup>, p. 23.

porzionale a quella incidente. Sebbene non sia stata tentata una valutazione di tale approssimazione, è molto ragionevole supporre che l'errore che si commette sia assolutamente trascurabile quando l'intensità del fascio di mesoni incidenti è così bassa che i mesoni arrivano « uno per volta » sui nucleoni, e questo qualunque sia la loro energia. Potrebbe sembrare che le armoniche superiori debbano avere grande importanza nella produzione di mesoni per urto mesone-nucleone, che dovrebbe entrare sensibilmente in concorrenza colla semplice diffusione ad energie abbastanza alte; tuttavia un tale fenomeno non può essere interpretato in una teoria classica, perchè una seconda armonica non significa necessariamente due mesoni, ma può anche significare un mesone di energia doppia. In tal caso la seconda armonica in questione potrebbe descrivere il processo inverso: due mesoni vengono simultaneamente assorbiti, producendone uno di energia doppia.

Con le approssimazioni discusse le equazioni del moto si risolvono esattamente, e si possono definire le grandezze  $Q_{\alpha\beta}$  col seguente significato:  $Q_{\alpha\beta}$  è il rapporto tra l'intensità angolare dei mesoni diffusi di specie  $\beta$  e l'intensità dei mesoni incidenti di specie  $\alpha$ , dove  $\alpha$  e  $\beta$  stanno per  $+$ ,  $0$ ,  $-$ . Si ha allora:

$$(14) \quad Q_{\alpha\beta} = \left(\frac{c\gamma}{\omega}\right)^2 \cdot \left(\frac{K}{\mu}\right)^4 \cdot |27\eta_\omega^2 - 1|^{-2} \cdot |\overline{Y_{\alpha\beta}}|^2 = Q \cdot |\overline{Y_{\alpha\beta}}|^2.$$

Nella (14) sono state fatte le posizioni seguenti:  $\omega = E/\hbar$ ,  $K = p/\hbar$ , dove  $E$ ,  $p$ , sono energia e impulso del mesone; poi:

$$(15) \quad \eta_\omega = \frac{c\gamma}{3\mu^2\omega} \cdot \left[ \frac{1}{a} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mu^3 + iK^3 \right].$$

Dalla (15) si vede che  $\eta_\omega$  è la  $R$  di Pauli, se si tien conto che  $\gamma$  equivale ad  $\frac{1}{2}(f\mu)^2$  di Pauli.

Le grandezze  $Y_{\alpha\beta}$  dal calcolo diretto risultano come segue:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{++} = [3(3 - 2\tau_-\tau_+)\eta_\omega - \tau_0]\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_+\tau_-\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_+\tau_-\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{+0} = -[6\tau_-\tau_0\eta_\omega - \tau_-]\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_0\tau_-\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_0\tau_-\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{+-} = -6\tau_-^2\eta_\omega\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_-^2\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_-^2\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{0+} = -[6\tau_0+\eta_\omega - \tau_+]\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_+\tau_0\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_+\tau_0\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{00} = 3(3 - 2\tau_0^2)\eta_\omega\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_0^2\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_0^2\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{0-} = -[6\tau_0\tau_-\eta_\omega + \tau_-]\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_-\tau_0\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_-\tau_0\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{-+} = -6\tau_+^2\eta_\omega\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_+^2\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_+^2\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{-0} = -[6\tau_+\tau_0\eta_\omega + \tau_+]\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_0\tau_+\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_0\tau_+\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{--} = [3(3 - 2\tau_+\tau_-) + \tau_0]\sigma^{(i)}\sigma^{(s)} + 9\tau_-\tau_+\eta_\omega \cos \vartheta + i\tau_-\tau_+\sigma^{(u)} \sin \vartheta. \end{array} \right.$$



dove si è posto  $\vartheta$  angolo di diffusione del mesone;  $\sigma^{(i)}$ ,  $\sigma^{(s)}$  componenti dello spin del nucleone secondo i versori d'incidenza e di diffusione rispettivamente;  $\sigma^{(u)}$  componente secondo il prodotto vettore dei versori d'incidenza e di diffusione. È chiaro che  $\tau_+$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau_-$ , descrivono la situazione dello spin isotopico del nucleone, e quindi in particolare la carica.

È da notare che tanto il fattore 27 nella (14), quanto i fattori 3, 6, 9, nelle (16) provengono dall'aver posto uguale a  $\sqrt{3}$  il modulo dello spin e quello dello spin isotopico, come risulta nella teoria quantistica.

Dalle (16) si vede immediatamente qual'è la principale difficoltà di questa teoria: non si può direttamente ricavare la sezione d'urto di una determinata reazione dalla (14), come sembrerebbe naturale, perchè questo porta a degli assurdi, come, ad esempio, la possibilità di uno scattering  $\pi^+ \rightarrow \pi^-$  o viceversa. È necessario per superare questo ostacolo, introdurre delle prescrizioni di calcolo che, essendo esterne alla teoria, possono apparire arbitrarie, e non hanno invero una giustificazione rigorosa.

Nel seguito esporremo un procedimento sostanzialmente diverso da quello di WADA, e cercheremo di giustificarlo, per quanto possibile, basandoci su ragionamenti corrispondenziali.

Consideriamo le dieci reazioni possibili in base alla conservazione della carica:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p + \pi^+ \rightarrow p + \pi^+, \\ n + \pi^- \rightarrow n + \pi^-, \end{array} \right. & (b) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p + \pi^0 \rightarrow p + \pi^0, \\ n + \pi^0 \rightarrow n + \pi^0, \end{array} \right. & (c) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p + \pi^- \rightarrow p + \pi^-, \\ n + \pi^+ \rightarrow n + \pi^+, \end{array} \right. \\
 (d) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p + \pi^0 \rightarrow n + \pi^+, \\ n + \pi^0 \rightarrow p + \pi^-, \end{array} \right. & (e) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p + \pi^- \rightarrow n + \pi^0, \\ n + \pi^+ \rightarrow p + \pi^0. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Come si vede, queste reazioni sono state suddivise in cinque gruppi, che contengono ciascuno due reazioni duali rispetto alla simmetria delle cariche. In base alla simmetria delle equazioni fondamentali (1) e (2), tali coppie di reazioni debbono avere le stesse sezioni d'urto. Avremo perciò cinque sezioni d'urto differenziali:  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_d$ ,  $\sigma_e$ . Si noti che il principio del bilancio dettagliato fornirebbe subito  $\sigma_d = \sigma_e$ , ma questo risultato discende automaticamente dagli sviluppi del calcolo.

Indicheremo le corrispondenti sezioni d'urto integrali con  $\Sigma_a$ ,  $\Sigma_b$ ,  $\Sigma_c$ ,  $\Sigma_d$ ,  $\Sigma_e$ .

Consideriamo ora un insieme di nucleoni, ciascuno in uno stato di spin isotopico per cui si ha una probabilità  $p$  di trovarlo protone, ed una  $n=1-p$  di trovarlo neutrone. Su questo insieme di nucleoni incida poi un fascio incoerente di mesoni, di cui  $N_+$  positivi,  $N_0$  neutri, ed  $N_-$  negativi. La distribuzione dei mesoni diffusi sarà data per i tre tipi, da:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_+(p\sigma_a + n\sigma_c) + N_0p\sigma_d, \\ N_+n\sigma_e + N_0\sigma_b + N_-p\sigma_e, \\ N_0n\sigma_d + N_-(p\sigma_c + n\sigma_a). \end{array} \right.$$

Questo è vero in ogni caso; tuttavia anche la descrizione classica data prima è applicabile se c'è equilibrio di carica, cioè se  $\tau_0$  è costante. Fissato  $\tau_0 = n - p$ , si hanno, in corrispondenza delle (17), le espressioni:

$$(18) \quad \begin{cases} N_+ Q_{++} + N_0 Q_{0+} + N_- Q_{-+}, \\ N_+ Q_{+0} + N_0 Q_{00} + N_- Q_{-0}, \\ N_+ Q_{+-} + N_0 Q_{0-} + N_- Q_{--}. \end{cases}$$

Le (17) e le (18) debbono essere identiche per tutti gli  $N$  per cui:

$$(19) \quad N_+ n \Sigma_e + N_0 (n - p) \Sigma_d - N_- p \Sigma_e = \varepsilon.$$

La (19) esprime infatti l'annullarsi della variazione di carica dei mesoni diffusi rispetto a quelli incidenti.

L'identità delle (17) e (18) sotto la condizione (19) porta alle relazioni:

$$(20) \quad \begin{cases} Q_{++} = p\sigma_a + n(\sigma_c - \mathcal{P}); & Q_{+0} = n(\sigma_e - \mathcal{P}'); & Q_{+-} = n\mathcal{P}''; \\ Q_{0+} = p\sigma_d - (n - p) \frac{\Sigma_d}{\Sigma_e} \mathcal{P}; & Q_{00} = \sigma_b + (n - p) \frac{\Sigma_d}{\Sigma_e} \mathcal{P}'; \\ Q_{0-} = n\sigma_d + (n - p) \frac{\Sigma_d}{\Sigma_e} \mathcal{P}''; & Q_{-+} = p\mathcal{P}; & Q_{-0} = p(\sigma_e - \mathcal{P}'); \\ Q_{--} = n\sigma_a + p(\sigma_c - \mathcal{P}''), \end{cases}$$

dove  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{P}''$  sono funzioni arbitrarie di  $p$ .

Già dalle (20) appare che non è possibile conservare per le  $Y_{\alpha\beta}$  la forma (16). Infatti ciò porterebbe a relazioni di simmetria  $Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}$  che sono incompatibili con le (20). Occorre pertanto modificare le (16), e noi seguiremo il criterio di simmetrizzare le espressioni non lineari nelle  $\tau_\alpha$ , rendendole poi lineari mediante le regole di moltiplicazione delle  $\tau_\alpha$  medesime. Si ottiene allora:

$$(21) \quad \begin{cases} Y_{++} = (3\eta_\omega - \tau_0) \sigma^{(i)} \sigma^{(s)} + 9\eta_\omega \cos \vartheta + i\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{00} = 3\eta_\omega \sigma^{(i)} \sigma^{(s)} + 9\eta_\omega \cos \vartheta + i\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{--} = (3\eta_\omega + \tau_0) \sigma^{(i)} \sigma^{(s)} + 9\eta_\omega \cos \vartheta + i\sigma^{(u)} \sin \vartheta, \\ Y_{+0} = \tau_- \sigma^{(i)} \sigma^{(s)}, & Y_{+-} = 0, & Y_{-0} = -\tau_+ \sigma^{(i)} \sigma^{(s)}, \\ Y_{0+} = \tau_+ \sigma^{(i)} \sigma^{(s)}, & Y_{-+} = 0, & Y_{0-} = -\tau_- \sigma^{(i)} \sigma^{(s)}. \end{cases}$$

La media indicata nella (14) va fatta sullo spin del nucleone, ed eseguita quantisticamente, fornisce:  $|\sigma^{(i)} \sigma^{(s)}|^2 = \cos^2 \vartheta$ ;  $\sigma^{(i)} \sigma^{(s)} = \cos \vartheta$ ;  $|\sigma^{(u)}|^2 = 1$ , e le



altre medie risultano nulle. Anche nel prendere la norma si fa uso delle relazioni di moltiplicazione delle  $\tau_x$ , ottenendo:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\overline{Y_{++}}|^2 = (1 + 144|\eta_\omega|^2 \cos^2 \vartheta) - 12(\eta_\omega + \bar{\eta}_\omega) \cos^2 \vartheta \cdot \tau_0, \\ |Y_{00}|^2 = 144|\eta_\omega|^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta, \\ |Y_{--}|^2 = (1 + 144|\eta_\omega|^2 \cos^2 \vartheta) + 12(\eta_\omega + \bar{\eta}_\omega) \cos^2 \vartheta \cdot \tau_0, \\ |\overline{Y_{+0}}|^2 = |\overline{Y_{0-}}|^2 = (1 + \tau_0) \cos^2 \vartheta, \quad |\overline{Y_{0+}}|^2 = |\overline{Y_{-0}}|^2 = (1 - \tau_0) \cos^2 \vartheta, \\ |Y_{+-}|^2 = |Y_{-+}|^2 = 0. \end{array} \right.$$

Sostituendo nella (14) e confrontando con le (20) si trova  $\varphi = \varphi' = \varphi'' = 0$  e:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_a = Q\{ |12\eta_\omega + 1|^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \}, \\ \sigma_b = Q\{ 144|\eta_\omega|^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \}, \\ \sigma_c = Q\{ |12\eta_\omega - 1|^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \}, \\ \sigma_d = \sigma_e = 2Q \cos^2 \vartheta. \end{array} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_a = \frac{4\pi}{3} Q\{ |12\eta_\omega + 1|^2 + 2 \}, \\ \Sigma_b = \frac{4\pi}{3} Q\{ 144|\eta_\omega|^2 + 2 \}, \\ \Sigma_c = \frac{4\pi}{3} Q\{ |12\eta_\omega - 1|^2 + 2 \}, \\ \Sigma_d = \Sigma_e = \frac{8\pi}{3} Q. \end{array} \right.$$

È interessante notare che le (23) e le (24) per  $\gamma \rightarrow 0$ , ossia trascurando  $\eta_\omega$ , forniscono esattamente il risultato del calcolo perturbativo quantistico; ciò costituisce indubbiamente una conferma a posteriori della fondatezza del procedimento seguito.

Nella tabella che segue sono riportati i valori di  $\Sigma_a$ ,  $\Sigma_c + \Sigma_e$ ,  $\Sigma_a/(\Sigma_c + \Sigma_e)$  in funzione dell'energia cinetica  $E_c$  del mesone incidente. (Le sezioni d'urto sono in mbarn).

Come si vede, sia l'andamento delle sezioni d'urto, sia il rapporto  $\Sigma_a/(\Sigma_c + \Sigma_e)$  non sono diversi gran che da quelli di WADA, mentre i valori assoluti delle sezioni d'urto sono alquanto più piccoli. In realtà i valori scelti per  $\gamma$  e per  $a\mu$  non sono gli stessi di WADA, ma mentre la scelta di  $a\mu$  è molto critica e cambiare il valore preso peggiorerebbe la situazione, ciò non accade per  $\gamma$ ; comunque non si riesce ad ottenere un accordo migliore con altri valori dei parametri.

$E_c/mc^2$	$\Sigma_a$	$\Sigma_c + \Sigma_e$	$\Sigma_a/(\Sigma_c + \Sigma_e)$
0	0	0	—
0.2	0.9	0.6	1.5
0.4	4.3	2.7	1.6
0.6	11.6	6.5	1.8
0.8	20.7	11.0	1.9
1	25.3	13.3	1.9
1.2	24.3	12.9	1.9
1.4	21.3	11.7	1.8
1.6	18.2	10.5	1.7
1.8	15.6	9.5	1.6
2	13.6	8.7	1.6

Si potrebbe introdurre, come fa WADA, una correzione per il fattore  $G(K)$ , che nelle nostre formule è stato fatto uguale ad 1; questo procedimento si presta però a due obiezioni. Prima, si mostra facilmente che se  $G(K)$  deve essere  $> 1$ , occorre che  $U(\mathbf{x})$  divenga negativa in qualche regione dello spazio: questo fatto richiederebbe un'interpretazione che la presente teoria non può dare. Seconda obiezione è che se si vuole  $G(K) > 1$  e lentamente variabile con  $K$ , occorre scegliere  $U(\mathbf{x})$  in modo tale che ne risulta anche  $a\mu \ll 1$ , contrariamente a quanto richiesto per ottenere l'andamento sperimentale. Inoltre se  $G(K)$  è lentamente variabile, o non si scosta mai sensibilmente da 1, oppure non lo si può porre  $= 1$  neanche nell'espressione di  $\eta_\omega$ . Sembra pertanto più coerente con tutto lo spirito della teoria porre  $G(K) = 1$ .

In conclusione si può dire che una teoria semiclassica alla Pauli non spiega quantitativamente i risultati sperimentali; è però probabile che questo accada perchè si trascura qui il rinculo del nucleone e gli stati d'energia negativa, mentre non ci sono ragioni per ritenere che tale approssimazione sia lecita, specie quando l'energia del mesone incidente è di 100 MeV o più.

Desidero infine ringraziare il prof. B. FERRETTI per avermi proposto questo argomento e per avermi costantemente seguito con molti utili consigli e discussioni.

## SUMMARY

The scattering of  $\pi$ -mesons on nucleons is studied using the natural extension of Pauli's method, and the involved approximations are discussed. As charge is unquantized, difficulties arise in the interpretation of the result, which are overcome by imposing correspondence with the quantum theory. The cross-sections so attained coincide with the quantum ones in perturbation limit; however by this method it does not seem possible to fit the experimental results.



## Modello a particelle indipendenti ed eccitazione del nucleo pesante.

A. KIND e G. PATERGNANI

*Istituto di Fisica dell'Università - Padova*  
*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova*

(ricevuto il 26 Luglio 1953)

**Riassunto.** — Il modello a particelle indipendenti in approssimazione classica viene usato nella descrizione di particolari aspetti dell'eccitazione dei nuclei pesanti nelle reazioni di alta energia. La dipendenza del coefficiente di trasmissione alla superficie del nucleo dall'angolo di incidenza conduce ad una energia di eccitazione residua maggiore di quella calcolabile trascurando tale dipendenza. Dall'analisi dell'andamento colla temperatura del cammino libero medio dei nucleoni nel nucleo, si deduce che quando questa superi i 7-8 MeV esiste la possibilità di concentrazione di energia di eccitazione in limitate zone, con localizzazione dell'emissione. Nel caso particolare di reazioni prodotte da protoni di 400 MeV questa condurrebbe ad un aumento della collimazione in avanti dei rami neri. Si prevede infine un accentuarsi della formazione di sottostrutture in seno al nucleo col crescere della temperatura, ed una conseguente alta percentuale di frammenti pesanti e particelle  $\alpha$  nell'emissione proveniente dalle zone più eccitate. Questi risultati sembrano essere in buon accordo coll'esperienza.

### Impostazione.

Come modello a *particelle indipendenti* si intende quella descrizione del nucleo pesante colla quale, nell'interazione fra nucleone e nucleo, sia che si tratti di stati legati, sia che si tratti di processi d'urto, quest'ultimo viene descritto in prima approssimazione mediante una buca di potenziale, e l'interazione reciproca fra i singoli nucleoni viene introdotta come perturbazione.

Vogliamo tentare di applicare questo modello — ridotto in termini particolarmente semplici, ma tali da metterne ugualmente in evidenza il significato fisico — al problema dell'eccitazione del nucleo pesante nelle reazioni di alta energia.

Senza cambiarne il carattere essenziale, si può ammettere che la buca di potenziale sia rettangolare. In questo caso i nucleoni possono essere pratica-

mente descritti nella loro interazione nell'interno della buca mediante onde piane.

Facciamo inoltre la semplificazione di considerare i singoli nucleoni come particelle classiche, cioè perfettamente localizzabili in coordinate spaziali e di impulso, ed interagenti tra di loro in funzione delle sezioni d'urto valevoli per nucleoni liberi (vedi, per esempio, TOMONAGA <sup>(1)</sup>). Tale approssimazione può avere una certa coerenza, poichè la lunghezza d'onda  $\lambda$  mediata sui nucleoni del nucleo è di  $0,8 \cdot 10^{-13}$  cm, nettamente inferiore al raggio del nucleo. In questo modo il nucleo pesante viene ad essere descritto mediante un gas ideale di *fermioni classici*.

Con BERNARDINI, BOOTH e LINDENBAUM <sup>(2)</sup> (Lavoro indicato in seguito con (A)) introduciamo i seguenti valori numerici:

Numero di nucleoni . . . . .	$A = 100$
Raggio del nucleo . . . . .	$R = 6,5 \cdot 10^{-13}$ cm
Limite della sfera di Fermi . . . . .	$\epsilon_0 = 22$ MeV
Profondità della buca di potenziale . . .	$U = 31$ MeV
Altezza della barriera coulombiana mediata su protoni e neutroni . . . .	$V = 4$ MeV

Anche per le sezioni d'urto prendiamo i valori del su citato lavoro.

### Coefficiente di trasmissione ed energia di eccitazione.

Sul modello a particelle indipendenti così enunciato si basa il metodo a *cascata nucleonica* usato da GOLDBERGER <sup>(3)</sup> ed altri Autori <sup>(2,4)</sup> nella descrizione delle reazioni nucleari che ci interessano. La reazione ha inizio colla formazione di una cascata di nucleoni nell'interno del nucleo, ammesso nello stato fondamentale. La parte più energica di questa esce come *emissione diretta*, mentre quella meno energica rimane nel nucleo e ne provoca l'eccitazione. Questa dà luogo a sua volta all'emissione di una seconda serie di particelle, che diremo di *emissione ritardata*. Nei lavori su indicati si *taglia* però il modello

<sup>(1)</sup> S. TOMONAGA: *Zeits. f. Phys.*, **110**, 573 (1938).

<sup>(2)</sup> G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. J. LINDENBAUM: Parte I, *Phys. Rev.*, **85**, 826 (1952); Parte II, *Phys. Rev.*, **88**, 1017 (1952).

<sup>(3)</sup> M. L. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1262 (1948).

<sup>(4)</sup> G. P. PUPPI, V. DE SABATA e E. MANARESI: *Nuovo Cimento*, **9**, 726 (1952).

coll'ipotesi seguente: quando un nucleone della cascata giunge alla superficie nucleare, la probabilità  $P$  che esso ha di uscirne non dipende da altri fattori che dalla sua energia cinetica  $\varepsilon_i$  nell'interno del nucleo e dalle dimensioni della buca.

Per una completa aderenza al modello da noi scelto il coefficiente di trasmissione  $P$  deve dipendere invece anche dal momento angolare del nucleone rispetto al baricentro del nucleo. Infatti tale momento deve essere conservato dal nucleone uscente, poichè con una buca di potenziale si definisce una interazione dovuta ad una forza centrale.

In termini classici, mentre col modello *tagliato* il coefficiente di trasmissione si definisce con

$$P_0(\varepsilon_i) = 0 \quad \text{per} \quad \varepsilon_i < U + V,$$

$$P_0(\varepsilon_i) = 1 \quad \text{per} \quad \varepsilon_i > U + V,$$

col nostro modello esso dipende anche dall'angolo  $\vartheta$  compreso fra la normale alla superficie nucleare e la direzione di incidenza del nucleone, e si scrive

$$P(\varepsilon_i, \vartheta) = 0 \quad \text{per} \quad \varepsilon_i \cos^2 \vartheta < U + V,$$

$$P(\varepsilon_i, \vartheta) = 1 \quad \text{per} \quad \varepsilon_i \cos^2 \vartheta > U + V.$$

Se  $f(\varepsilon_i, \vartheta)$  è la funzione di distribuzione per unità di angolo solido delle velocità dei nucleoni alla superficie del nucleo, per il coefficiente di trasmissione  $P(\varepsilon_i)$  integrale in  $\vartheta$  si ha

$$P(\varepsilon_i) = \frac{\int_0^{\vartheta_m(\varepsilon_i)} d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta f(\varepsilon_i, \vartheta)}{\int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta f(\varepsilon_i, \vartheta)} P_0(\varepsilon_i),$$

dove è

$$\varepsilon_i \cos^2 \vartheta_m = U + V.$$

Osserviamo che, nell'ipotesi di una distribuzione di equilibrio dei nucleoni, è col coefficiente  $P(\varepsilon_i)$  così definito che si ottiene per via cinetica la formula evaporativa classica per un gas ideale<sup>(5)</sup>. Col modello tagliato questa riusci-

(5) J. E. MAYER e M. G. MAYER: *Statistical Mechanics* (New York, 1948), p. 390.



rebbe moltiplicata per il fattore

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i - (U + V)} = \frac{\varepsilon_e + U}{\varepsilon_e - V},$$

dove  $\varepsilon_e$  è l'energia della particella fuori dal nucleo.

Il fatto che gli spettri evaporativi calcolati per un gas ideale riproducano assai bene quelli sperimentali <sup>(6)</sup> è un indice a favore della coerenza del modello.

Con questo modello vogliamo ora studiare un particolare processo: quello dell'interazione di protoni di 400 MeV con nuclei pesanti già studiato in (A) col modello tagliato. Questo caso è per noi molto interessante poichè, pure trattandosi di energia piuttosto elevata, l'eccitazione del campo mesonico può ancora ritenersi trascurabile e gli urti tra nucleoni elastici.

Per risalire a posteriori dai risultati ottenuti in (A) a quelli

che si otterrebbero col nostro modello, ci siamo serviti della distribuzione angolare  $f(\theta)$  integrale su  $\varepsilon_i$  ottenuta da PUPPI, DE SABATA e MANARESI <sup>(7)</sup> in relazione al loro lavoro sulla formazione di stelle per cattura di mesoni  $\pi^-$  <sup>(4)</sup>. Effettivamente la ripartizione angolare valevole in quel caso non dovrebbe essere sensibilmente diversa da quella che ci interessa. Ammettendo che  $f(\varepsilon_i, \theta)$  non vari sensibilmente con  $\varepsilon_i$ , con quella ripartizione abbiamo calcolato  $P(\varepsilon_i)$ , e con esso modificato lo spettro di emissione diretta ottenuto in (A) (vedi fig. 1 e 2).

Secondo il modello che usiamo, a questa prima emissione segue quella ritardata di una seconda serie di particelle dovuta all'eccitazione residua del nucleo.

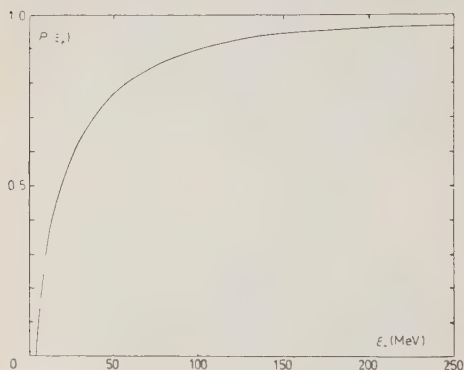


Fig. 1. - Coefficiente di trasmissione  $P(\varepsilon_e)$  in funzione dell'energia  $\varepsilon_e$  del nucleone fuori del nucleo.

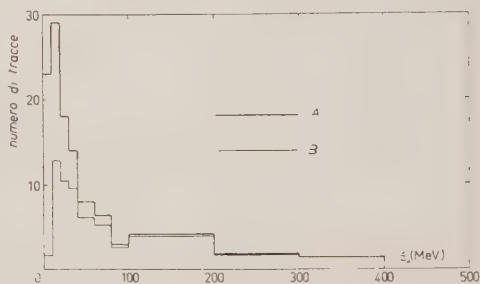


Fig. 2. - Spettri di emissione diretta ottenuti rispettivamente col modello (A) e con quello (B).

<sup>(6)</sup> K. J. LE COUTEUR: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 259 (1950).

<sup>(7)</sup> Comunicazione privata.

Lo spettro osservato nelle lastre è la sovrapposizione di questi due spettri.

In (A) (tabella II, parte II) per il numero medio  $n_t$  sperimentale dei rami neri ( $\varepsilon_e < 30$  MeV) per stella è dato il valore 2,5. Sottraendo a questo valore quello teorico  $n_d$  dei rami neri di emissione diretta, si ottiene un valore diverso, a seconda della teoria usata, per il numero medio  $n_r$  dei rami di emissione ritardata. Inoltre dallo spettro di emissione diretta si può determinare, come è indicato in (A), il valore medio dell'energia totale di eccitazione  $E$ , e quindi quello  $E/n_r$  legato ad ogni ramo (nero) di emissione ritardata. In tabella I sono dati i valori di  $n_d/n_t$ ,  $E$ ,  $E/n_r$  calcolati rispettivamente col modello usato in (A) e col nostro (B).

TABELLA I.

Modello	$n_d/n_t$	$E$	$E/n_r$
(A)	23 %	50 MeV	26 MeV
(B)	8,4 %	86 MeV	38 MeV

Benchè, come si vedrà in seguito, nel particolare caso che trattiamo l'emissione ritardata non possa probabilmente essere considerata completamente come *evaporazione*, l'ipotesi evaporativa può essere presa come un valido punto di riferimento. Sotto questo punto di vista il valore di  $E/n_r$  ottenuto secondo (B) è indubbiamente un argomento positivo a favore di questo modello (vedi, per esempio, i lavori di LE COUTEUR <sup>(6, 8)</sup> e quello di BERNARDINI, CORTINI e MANFREDINI <sup>(9)</sup>).

### Eccitazione ed emissione locale.

Nei lavori sopracitati sulle reazioni nucleari si è generalmente assunta come valida l'ipotesi che l'emissione ritardata si possa considerare come *evaporazione* da parte del nucleo. In effetti dal confronto dei tempi necessari al raggiungimento dell'equilibrio termodinamico, che sono dell'ordine di  $10^{-22}$  s, con quelli impiegati dall'evaporazione nella sua totalità, che superano i  $10^{-19}$  s, si deve concludere che l'ipotesi evaporativa deve dare un'immagine abbastanza coerente del processo nelle sue linee generali.

Per uno studio più preciso queste considerazioni di tempi, che valgono solo per la totalità del processo, non sono più sufficienti e può essere necessaria un'analisi più dettagliata.

<sup>(8)</sup> K. J. LE COUTEUR: *Proc. Phys. Soc.*, A **65**, 718 (1952).

<sup>(9)</sup> G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Phys. Rev.*, **79**, 952 (1950).

Nella nota pubblicata da uno di noi <sup>(10)</sup>, che indicheremo in seguito con (I), nella quale si è appunto usato il modello a nucleoni indipendenti, si è considerata la modificazione dello spettro evaporativo dovuta alla concomitanza nel tempo dei processi di assestamento e di emissione, facendo però l'ipotesi che, pure nell'assenza dell'equilibrio termodinamico nel nucleo, l'energia di eccitazione sia ripartita uniformemente su tutto il suo volume (equilibrio spaziale e non energetico). Questo è valido solo fino a che il cammino libero medio dei nucleoni nel nucleo sia almeno dell'ordine di grandezza di  $R$ . In caso contrario bisognerebbe tenere conto del gradiente di temperatura che si viene a formare nel nucleo a causa del flusso di nucleoni verso l'esterno. Allora però, come vedremo, dovrebbero intervenire altre cause di inomogeneità tali da condurre ad una concentrazione di energia in limitate zone del nucleo con effetti molto più vistosi di quelli calcolabili con quel modello.

Già BETHE <sup>(11)</sup> e TOMONAGA <sup>(12)</sup> formularono teoricamente la possibilità che nel caso di una forte eccitazione si possa avere localmente una emissione di particelle prima che sia raggiunto l'equilibrio termodinamico.

Effettivamente col nostro modello si possono avere inomogeneità spaziali di energia di eccitazione non appena il cammino libero medio  $\lambda$  dei nucleoni sia piccolo di fronte alle dimensioni del nucleo. Inoltre una tale inomogeneità influisce sull'emissione solo se il tempo  $\tau_d$  necessario alla completa diffusione dell'energia di eccitazione è più grande del tempo  $\tau_e$  che impiegano le prime particelle a lasciare la zona eccitata.

Per il libero cammino medio dei nucleoni nella materia nucleare, coi simboli usati in (I), tenuto conto che  $\Delta^-(\varepsilon_i)/n(\varepsilon_i)$  è il numero di urti al secondo di una particella di energia  $\varepsilon_i$ , vale

$$\lambda(\varepsilon_i) = \frac{v(\varepsilon_i)n(\varepsilon_i)}{\Delta^-(\varepsilon_i)}.$$

Facendo l'ipotesi che la distribuzione energetica sia praticamente quella di equilibrio termodinamico, approssimazione per noi sufficiente, abbiamo numericamente calcolato  $\lambda$  in funzione della temperatura  $T$  per vari valori di  $\varepsilon_i$ . I risultati sono riportati in fig. 3.

Da questi dati si vede che per  $T < 6$  MeV il cammino libero medio  $\lambda$  dei nucleoni che possono essere responsabili della diffusione di energia tende verso valori dell'ordine del diametro nucleare, e non può quindi avere senso parlare di localizzazione di energia di eccitazione. Per  $T > 8$  MeV  $\lambda$  inco-

<sup>(10)</sup> A. KIND: *Nuovo Ciment*, **10**, 176 (1953).

<sup>(11)</sup> H. BETHE: *Phys. Rev.*, **53**, 675 (1938).

<sup>(12)</sup> Valore dedotto dai risultati del lavoro <sup>(13)</sup> messi gentilmente a nostra disposizione dagli Autori.



mincia ad assumere valori sensibilmente minori di  $R$  ed un'eccitazione locale può avere luogo.

Più precisamente, se ammettiamo che le dimensioni lineari minime di una zona del nucleo, nella quale può aver luogo una localizzazione di energia di eccitazione, siano date in ordine di grandezza dal tratto medio percorso da

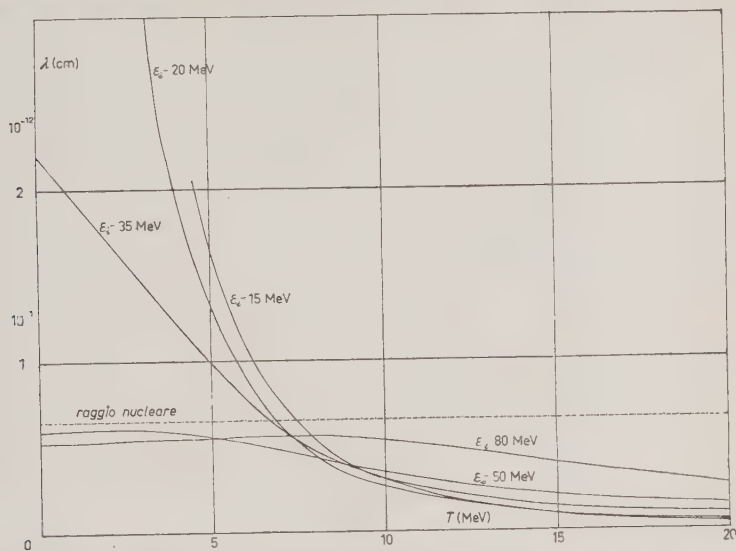


Fig. 3. - Cammino libero medio  $\lambda$  dei nucleoni in seno alla materia nucleare in funzione della loro energia cinetica  $\varepsilon_i$  e della temperatura  $T$ .

un nucleone al limite della sfera di Fermi, diciamo, in 2 urti, a questa zona possiamo attribuire il volume

$$V' = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\lambda(\varepsilon_0)\sqrt{2}}{2} \right)^3.$$

Avendo il nostro nucleo 100 nucleoni, quelli compresi in questo volume sono

$$A' = 100 \left( \frac{\lambda(\varepsilon_0)\sqrt{2}}{2R} \right)^3.$$

I valori di  $A'$  sono riportati in funzione di  $T$  nella fig. 4.

In fig. 5 abbiamo riportato, pure in funzione di  $T$ , i valori di  $\tau_d$  e di  $\tau_r$ . Abbiamo posto

$$\tau_d = \frac{R^2}{v(\varepsilon_0)\lambda(\varepsilon_0)},$$

pari al tempo impiegato in media da un nucleone a percorrere la distanza  $R$ ; per  $\tau_e$  abbiamo preso, coerentemente al modello usato, il valore dato dalla teoria evaporativa valevole per l'emissione di un protone, per il quale la barriera coulombiana sia di 3 MeV. Un sensibile abbassamento della barriera coulombiana può effettivamente essere causato dalla stessa eccitazione locale; la scelta del suo valore non influisce però affatto sui tratti essenziali della situazione.

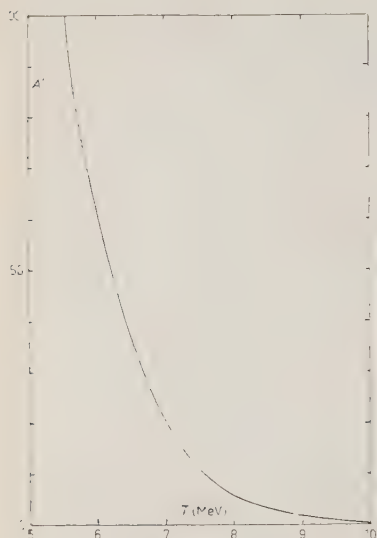


Fig. 4. — Numero minimo  $A'$  di nucleoni sui quali si può avere concentrazione di energia di eccitazione, in funzione della temperatura  $T$ .

Dall'insieme di questi dati si dovrebbe concludere che la temperatura di 7-8 MeV rappresenta un limite assai interessante per il comportamento del nucleo. Al di sotto di questo limite la materia nucleare è caratterizzata macroscopicamente da una sostanziale omogeneità: l'eccitazione non può essere intesa che come diffusa uniformemente

a tutto il nucleo e l'emissione ritardata non può essere che isotropa. Oltre questo limite possono sussistere nella materia nucleare delle inomogeneità: il nucleo può essere localmente eccitato e l'emissione sarà diversa nei diversi punti della sua superficie. Dalla ripidezza delle curve date nelle fig. 4 e 5 si deve dedurre che il comportamento della materia nucleare intorno a questo valore della temperatura è instabile, e che effetti di fluttuazione possono quindi essere determinanti nel processo di emissione.

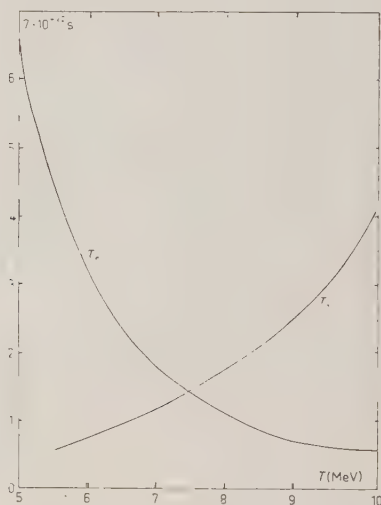


Fig. 5. — Tempo  $\tau_d$  necessario alla diffusione dell'energia di eccitazione a tutto il nucleo e tempo  $\tau_e$  necessario all'emissione ritardata del primo protone, in funzione della temperatura  $T$ .

Dalle semplici considerazioni che seguono ci pare di potere concludere che tali effetti dovrebbero essere osservabili in particolare nelle interazioni con protoni di 400 MeV, e dovrebbero in questo caso aumentare la collimazione in avanti dei rami di emissione ritardata.

Infatti, secondo il modello, colla penetrazione del nucleone incidente nel nucleo si forma una cascata che si sviluppa dall'emisfero posteriore verso quello anteriore. A parte nucleoni di bassa energia che vengono lasciati indietro, la parte più energica della cascata arriva alla superficie del nucleo. Qui essa viene «selezionata»: a seconda della modalità colla quale ogni nucleone si affaccia alla superficie, esso ne esce o viene riflesso. L'energia dei nucleoni riflessi, che sono i più energici di tutti quelli rimasti, rappresenta la parte maggiore dell'energia di eccitazione. Questa energia è pertanto in massima parte concentrata inizialmente in una zona del nucleo adiacente alla superficie (di spessore dell'ordine di  $\lambda\sqrt{2}$ ), e là dove la temperatura raggiunge almeno il valore di 7 MeV, la materia nucleare diventa tanto isolante, che si può avere emissione locale.

In (A) (fig. 5, parte II) è data la distribuzione angolare dei nucleoni di emissione diretta. Da questi dati e dall'andamento del coefficiente di trasmissione  $P(\epsilon_i, \theta)$  si può stimare che in una buona parte di tutte le stelle i  $2/3$  dell'energia di eccitazione del nucleo siano inizialmente trattenuti nell'emisfero anteriore. In questo caso allora per le stelle di 6 e più rami neri, alle quali si può attribuire un'energia di eccitazione media di 240 MeV, che secondo (A) (fig. 1, parte I) rappresentano circa il 7% della totalità, si può contare su di una concentrazione di 160 MeV nell'emisfero anteriore.

È sufficiente che per effetto di fluttuazione questa energia non sia distribuita uniformemente su 50 nucleoni, ma solo su 30, perchè sia raggiunta localmente la temperatura di 8 MeV. In questo caso l'emisfero anteriore incomincia ad emettere prima che il nucleo sia uniformemente eccitato, e nel sistema del centro di massa del nucleo le tracce di emissione ritardata saranno collimate in avanti.

In (A) si è fatto il confronto fra le distribuzioni angolari teoriche e sperimentali dei rami nero-grigi e grigi, trovando fra di esse un accordo particolarmente buono. Coerentemente all'impostazione di quel lavoro, col quale si rinuncia ad una descrizione dettagliata del comportamento delle particelle di energia più bassa, non si sono invece analizzati in modo particolare i dati relativi ai rami neri.

Da parte nostra, per un confronto coll'esperienza, vogliamo invece tentare la seguente analisi.

Ammettiamo innanzi tutto che:

1) La distribuzione angolare dei rami neri di emissione diretta sia quella data in (A).



2) Il 20 % delle stelle osservate sia prodotto in elementi leggeri.

3) Circa la metà dell'impulso del nucleone incidente venga trasmessa al nucleo all'atto dell'eccitazione (<sup>12</sup>).

Facciamo poi separatamente le due ipotesi:

a) In accordo coi risultati teorici ottenuti in (A), il numero dei rami neri di emissione diretta rappresenti il 30 % della totalità dei rami neri.

b) In accordo col modello (B), questa percentuale sia solo dell'8%.

Se si ammette che l'emissione ritardata sia isotropa nel sistema del centro di massa del nucleo, coll'ipotesi 3) si può calcolare la ripartizione angolare

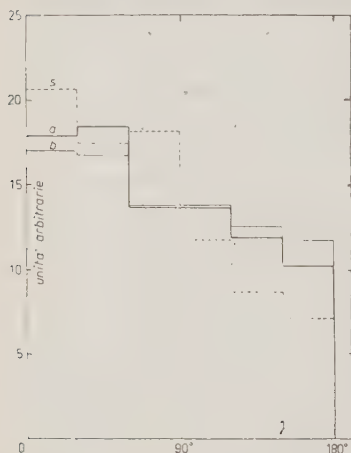


Fig. 6. - Distribuzioni teoriche ottenute rispettivamente colle ipotesi a) e b) e distribuzione sperimentale s) della totalità dei rami neri in funzione dell'angolo  $\gamma$  formato colla direzione del primario.

di uscita dei rami neri. Ci pare però probabile che un tale cambiamento non possa che portare ad una maggiore isotropia di questi rami e quindi dare maggior peso alle nostre conclusioni.

A convalidare l'immagine alla quale siamo così giunti dovrebbero concorrere i risultati ottenuti ultimamente da GRILLI e VITALE (<sup>13</sup>). Essi osservano che nella distribuzione angolare dei rami neri rispetto alla traccia di *rinculo* in stelle prodotte da primari di raggi cosmici di 300-500 MeV esiste una collimazione verso i 180°, che pare maggiore di quella teoricamente prevedibile

effettiva di queste tracce. Sovrapponendo questa ripartizione a quella determinata per le tracce di emissione diretta, dosata una volta secondo l'ipotesi a) ed una volta secondo quella b), si ottengono due distribuzioni angolari per la totalità dei rami neri. In fig. 6 ne riportiamo i due istogrammi, indicati rispettivamente con a) e b), insieme a quello sperimentale s), dato in (A).

Si osserva che la distribuzione sperimentale è in entrambi i casi sensibilmente più anisotropa di quella teorica. Pare quindi confermata la previsione dedotta dal nostro modello, secondo la quale l'emissione ritardata non dovrebbe essere isotropa nel sistema del centro di massa del nucleo, ma collimata in avanti.

È da osservare che l'assunzione 1), se è in accordo con l'ipotesi a), non lo è più con la b). Infatti coll'introduzione del nostro coefficiente di trasmissione  $P(\varepsilon_i, \vartheta)$  si viene a cambiare la distribuzione angolare

(<sup>13</sup>) M. GRILLI e B. VITALE: *Nuovo Cimento* (di prossima pubblicazione).

con l'ipotesi di una emissione ritardata isotropa nel sistema del centro di massa del nucleo. Coll'immagine dell'emissione locale un tale effetto sarebbe invece effettivamente da attendersi.

### Formazione di sottostrutture nucleari.

Usando il modello a particelle indipendenti nella sua versione quantisticamente corretta e conducendo il calcolo fino ai termini di seconda approssimazione, EULER <sup>(14)</sup> ha dimostrato come la materia nucleare, che si considera nell'approssimazione di partenza come un gas ideale di nucleoni, a causa dell'interazione reciproca fra questi vada soggetta a fluttuazioni di densità legate alla formazione di più o meno stabili sottostrutture nucleari.

Usando lo stesso modello, FERRARI e VILLI <sup>(15)</sup> hanno studiato la dipendenza dell'energia di eccitazione del nucleo pesante dalla sua temperatura. Dai loro risultati preliminari si ha che, per temperature non molto elevate, il calore specifico di esso aumenta colla temperatura in modo meno rapido che per un gas ideale.

Questo fatto dipende di nuovo dagli effetti di fluttuazione di densità, e mette in evidenza che, coll'aumentare dell'energia di eccitazione aumenta nel nucleo la possibilità di formazione di sottostrutture. A questa conclusione conduce in sostanza anche il nostro modello classico, e nella dipendenza di  $\lambda$  da  $T$  abbiamo da esso una indicazione dell'andamento di questo processo colla temperatura: quanto più la materia nucleare si allontana dallo stato di gas degenerare, tanto più il principio di esclusione perde la sua funzione di *regolatore* nell'interazione fra i singoli nucleoni, e tanto più questi interagiscono fra di loro indipendentemente dal fatto di formare tutti insieme quel sistema che è il nucleo.

D'altra parte il processo di *coagulazione* ha teoricamente un limite: colla temperatura aumenta anche l'energia cinetica media dei nucleoni, e ciò tende a sciogliere i complessi che si vanno formando. Quest'effetto dovrebbe però essere prevalente soltanto quando l'energia di eccitazione raggiunga il valore di quella di legame dei nucleoni nel nucleo. In questo caso però il nucleo stesso non potrebbe più sussistere come sistema legato. Quindi in un nucleo eccitato (e non in fase di esplosione), almeno alla sua superficie, una tale situazione non dovrebbe mai essere raggiunta.

Questo stato di cose dovrebbe essere particolarmente evidente in quelle zone del nucleo nelle quali si abbia concentrazione di energia di eccitazione.

<sup>(14)</sup> H. EULER: *Zeits. f. Phys.*, **105**, 553 (1937).

<sup>(15)</sup> F. FERRARI e C. VILLI: *Nuovo Cimento*, **10**, 94 (1953). Ringraziamo gli Autori per le fruttuose discussioni con essi avute.

Quelle stesse zone dovrebbero avere la tendenza ad organizzarsi in veri e propri sistemi stabili di un numero limitato di nucleoni in seno al nucleo. In essi dovrebbero in particolare tendere a legarsi numeri eguali di protoni e neutroni. Inoltre, dato che la formazione di sottostrutture è un processo esotermico (abbassamento del calore specifico), la temperatura in esse raggiunta dovrebbe superare quella prevedibile colla nostra approssimazione a gas ideale.

Un tale comportamento della materia nucleare avrebbe un effetto determinante sull'emissione ritardata. Innanzi tutto l'esistenza di sottostrutture fortemente indipendenti nel nucleo dovrebbe facilmente portare a processi di fissione. Inoltre l'emissione proveniente dalle zone più eccitate, oltre che presentare la collimazione caratteristica dell'emissione locale, dovrebbe rispecchiare la particolare struttura di queste. Essa dovrebbe contenere un'alta percentuale di particelle  $\alpha$ ; il loro spettro energetico dovrebbe essere sensibilmente allungato verso le basse energie per la forte caduta della barriera coulombiana, e verso le alte per l'alta temperatura delle zone di provenienza.

Dai dati sperimentali fino ad ora a disposizione questa immagine pare effettivamente confermata. Essa coincide anzi strettamente con quella formulata per via induttiva da HARDING, LATTIMORE e PERKINS <sup>(16)</sup> per interpretare i dati sperimentali.

Sia dalle loro osservazioni che da quelle di HODGSON <sup>(17)</sup> risulta che, mentre lo spettro energetico dei protoni attribuibili all'emissione ritardata è essenzialmente in accordo con ciò che si può prevedere per un processo di evaporazione, quello delle particelle  $\alpha$  in stelle di una certa eccitazione presenta un andamento assai particolare: esso potrebbe essere ricondotto ad un processo evaporativo soltanto ammettendo una temperatura sensibilmente più alta di quella valevole per i protoni ed una barriera coulombiana molto più bassa (dell'ordine di 3 MeV).

Una riconferma dello stesso modello si ha nelle misure pure fatte da HARDING e Coll. <sup>(16)</sup> sull'angolo formato dalla risultante delle direzioni dei protoni e delle particelle  $\alpha$  colla direzione della traccia di rinculo. Mentre pare che i protoni abbiano una distribuzione angolare riconducibile ad una emissione isotropa nel sistema del centro di massa del nucleo, le particelle  $\alpha$  presentano una collimazione verso i 180° forse riallacciabile a quella trovata da GRILLI e VITALE <sup>(13)</sup> per le tracce nere in generale. Un'analisi risolutiva in questo senso, basata su una statistica più ricca, sarebbe molto desiderabile.

È da osservare che, secondo il modello da noi adottato, all'emissione dovuta all'eccitazione residua si sovrappongono i fenomeni di emissione diretta che hanno carattere diverso da quelli considerati.

---

<sup>(16)</sup> J. B. HARDING, S. LATTIMORE e D. H. PERKINS: *Proc. Roy. Soc. London*, A **196**, 325 (1949).

<sup>(17)</sup> P. E. HODGSON: *Phil. Mag.*, **43**, 934 (1952).



Desideriamo ringraziare vivamente i professori N. DALLAPORTA e G. PUPPI per le utili discussioni con essi avute su diversi punti del presente lavoro. Del pari siamo grati ai dottori M. GRILLI e B. VITALE per le discussioni nella valutazione dei dati sperimentali.

— — — — —

#### SUMMARY (\*)

The pattern with independent particles in classical approximation is used for the description of particular features of the excitation of heavy nuclei in high energy reactions. The dependence of the transmission coefficient at the nucleus' surface on the incidence angle leads to a residual excitation energy greater than the one obtained neglecting this dependence. Analysing the variation with temperature of the mean free path of nucleons within the nucleus it is seen that when it exceeds 7-8 MeV there is the possibility that the excitation energy concentrates in limited zones producing localized emission. In the particular case of reactions produced by protons of 400 MeV this should lead to an augmentation of the forward collimation of black prongs. It is further to expect that with rising temperature the building of understructures within the nucleus should intensify with ensuing high percentage of heavy fragments and  $\alpha$  particles in the emission originating from the more excited zones..

---

(\*) Traduzione a cura della Redazione.

## Gamma Rays Emitted from $^{60}\text{Co}$ , $^{56}\text{Mn}$ , $^{187}\text{W}$ , $^{128}\text{I}$ , $^{104}\text{Rh}$ .

E. GERMAGNOLI and A. MALVICINI

*Laboratori CISE - Milano*

L. ZAPPA

*Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico - Milano*

(ricevuto il 29 Luglio 1953)

**Summary.** — A coincidence arrangement of two single crystal spectrometers, suitable to the analysis of decay schemes of radioisotopes, has been developed and used to study  $\gamma$  radiations from  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{56}\text{Mn}$  and  $^{187}\text{W}$ .  $\gamma$  spectra of  $^{128}\text{I}$  and  $^{104}\text{Rh}$  have also been examined by means of a single crystal spectrometer.

### 1. — Introduction.

In order to determine decay schemes of radioisotopes, energy measurements of  $\gamma$ -rays and analysis of  $\beta$ -spectra and, if possible, an estimate of relative intensity of each  $\beta$  and  $\gamma$ -line are generally required.

Information concerning the character of transitions and of relative nuclear levels can be also obtained by means of investigations of angular correlation between  $\gamma$ -rays successively emitted in cascade or between  $\beta$ -particles and  $\gamma$ -rays. The evaluation of internal conversion coefficients of  $\gamma$ -rays plays also an important part in this kind of research.

Coincidence technique proved to be extremely useful for many studies concerning decay of nuclei. It is easy, in fact, to decide by means of coincidence measurements which  $\gamma$ -rays or which  $\beta$ -particles are simultaneously emitted from a nucleus, and this possibility is often helpful when decay schemes which are tentatively proposed on the basis of the knowledge of energies of radiations and of relative intensity of single lines are to be checked.

Recent developments of scintillation spectrometers technique are making such investigations easy; the fact that crystals of suitable compounds have

the joint advantages of a high efficiency for  $\gamma$ -rays, of a good proportionality and of a satisfactory energy resolution, makes it possible to develop some researches which would otherwise have turned to be very laborious mainly owing to lack of intensity.

A short summary of methods which were used to this end till 1951 is given, for instance, by JOHANSSON and ALMQUIST <sup>(1)</sup>. As pointed out by these authors, a combination of coincidence techniques and of energy measurements by means of scintillation spectrometers gives the further possibility of obtaining a direct experimental demonstration of the existence of  $\gamma$ -cascades in the decay schemes.

Methods based on this principle have been used by BANNERMAN, LEWIS and CURRAN <sup>(2)</sup> during an analysis of decay scheme of  $^{140}\text{La}$ , and in similar cases by BELL, CASSIDY and KELLEY <sup>(3)</sup> and by JOHANSSON and ALMQUIST <sup>(1)</sup>.

It seemed worth while to develop an analogous method in order to investigate radiations emitted from some nuclei. The possibilities of such a method are to a considerable extent connected with the energy resolution presently obtainable by means of crystal spectrometers and consequently further improvements are probable.

## 2. — Experimental method.

$\gamma$ -rays from two isotopes ( $^{104}\text{Rh}$ ,  $^{128}\text{I}$ ) have been analyzed by means of a single crystal spectrometer ( $\text{NaI—Tl}$  activated); in the three remaining cases ( $^{60}\text{Co}$ ,  $^{56}\text{Mn}$ ,  $^{187}\text{W}$ ) two single crystal spectrometers have been arranged in coincidence. Experimental apparatus is discussed in detail in the following section.

When coincidence measurements are performed,  $\gamma$ -radiations are firstly investigated making use of a single crystal spectrometer and their energy spectrum examined with the aid of a 99 channel analyzer <sup>(4)</sup>.

$\gamma$ -lines due to photoelectric effect taking place within the crystal are easily identified and their energies measured, if necessary, after calibration of the detector with some  $\gamma$ -lines whose energies are well known.

Then the pulses corresponding to each photopeak of the identified  $\gamma$ -lines are selected by means of two threshold discriminators, and the pulses whose amplitudes are included between the two thresholds gate a circuit which

<sup>(1)</sup> S. A. E. JOHANSSON and S. ALMQUIST: *Arkiv f. Fysik*, **5**, 427 (1952).

<sup>(2)</sup> R. C. BANNERMAN, G. M. LEWIS and S. C. CURRAN: *Phil. Mag.*, **42**, 1097 (1951).

<sup>(3)</sup> P. R. BELL, J. M. CASSIDY and G. C. KELLEY: *Phys. Rev.*, **82**, 103 (1951).

<sup>(4)</sup> E. GATTI: *Il Nuovo Cimento*, **7**, 655 (1950).

connects the amplifying chain of another single crystal spectrometer to the 99 channel analyzer.

This second crystal is irradiated by the same source; in this way  $\gamma$ -rays which are emitted «simultaneously» with the  $\gamma$ -line gating the coincidence apparatus, are selected from the total energy spectrum, as given by the second spectrometer.

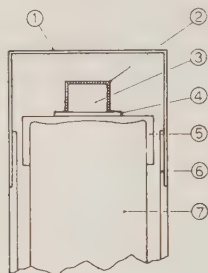


Fig. 1.

Assembling of  $\gamma$ -rays detector.

1) Al container; 2) MgO; 3) NaI crystal; 4) Thin glass window; 5) Lucite; 6) Al; 7) RCA 5819 phototube.

### 3. - Experimental apparatus

NaI (Tl activated) crystals are cubic, 2.5 or 1.25 cm side: in some cases, when low energy  $\gamma$ -lines were examined, we made use of about 2 mm thick crystals, in order to get a better resolution. With thin crystals the efficiency is considerably reduced for more energetical  $\gamma$ -rays, which would otherwise contribute, owing to the continuous distribution of Compton recoils, to form a background in the low energy region of the spectrum.

Crystals were fitted to the photocathode of the phototube RCA 5819 as shown in fig. 1. Their surfaces were smoothed by means of abrasive paper and chemically cleaned with methylal ethylcheton; every crystal was then assembled in an Al container, the walls of which were about  $100 \text{ mg cm}^{-2}$  thick; a thin glass window was soldered to it with Araldit C.I.B.A.

The optical contact between one side of the crystal and the glass window was obtained by means of Silicon wax DC-200 (viscosity  $10^6$  centistokes); a layer of MgO surrounds the remainder sides of the crystal and acts as a diffuser for light.

The preliminary processes above described were carried out in a dry box and with accurately dehydrated materials, owing to hygroscopicity of NaI. With these precautions the optical characteristics of the surfaces of the crystals did not noticeably change for some months.

Each amplifying chain was of the conventional type and consisted of a cathode follower, a pulse shaper and a Mod. 100 amplifier; a block diagram of the circuit which was used in the case of coincidence measurements is given in fig. 2.

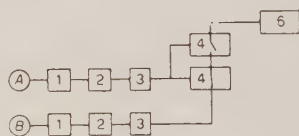


Fig. 2.

Block diagram of the circuit.

A and B phototubes. 1) Cathode followers; 2) Pulse shapers; 3) Amplifiers; 4) Lower and upper channel's thresholds; 6) 99 channel analyzer.



In order to minimize the rate of random coincidences in comparison with the rate of effective coincidences, we made use of rather weak  $\gamma$  sources, because the ratio between the rates of random pulses and true pulses is proportional to  $N\tau$ , where  $N$  is the disintegration rate within the source and  $\tau$  is the resolving time of the coincidence circuit. We made use of a rather slow coincidence ( $\tau \sim 2 \mu\text{s}$ ) and consequently we chose  $N \sim 10^4 \text{ dis. s}^{-1}$  so as to keep the above mentioned ratio less than  $\sim 1\%$  or  $2\%$ .

The sources of  $^{56}\text{Mn}$ ,  $^{128}\text{I}$ ,  $^{104}\text{Rh}$  and  $^{187}\text{W}$  were obtained by irradiation of suitable samples with neutrons emitted from  $\sim 500 \text{ mg}$  of  $\text{RaBr}_2$  plus berillium and slowed down in a water tank;  $^{60}\text{Co}$  was supplied by A.E.R.E. (Harwell).

The source was located between the two crystals, at a distance of few millimeters from both: as it is convenient to have a very large solid angle, this was made so; the above ratio between random and true coincidences not being dependent upon the solid angle.

A cause of random coincidences may also be attributed to the fact that  $\gamma$ -rays which undergo Compton effect within one of the two crystals can be scattered into the other one and be therefore detected as a true coincidence pulse. As in the chosen geometrical arrangement this effect takes place mainly for scattering angles between  $90^\circ$  and  $180^\circ$ , these pulses will constitute a line whose peak corresponds to an energy slightly less than  $0.250 \text{ MeV}$  (this can be easily deduced from the elementary formula of Compton effect). This fact makes the interpretation of spectra ranging between  $0.1$  and  $0.3 \text{ MeV}$  somewhat more difficult. No systematic attempt was done to minimize such an effect, which was not very important in our experiments, but it will be certainly possible to reduce it by means of suitable experimental arrangements, without a significant loss of intensity.

In order to test the performance of the whole apparatus the well known  $\gamma$ -spectrum of  $^{60}\text{Co}$  has been studied: the discussion of obtained results will be found in the following sections.

#### 4. - Analysis of $\gamma$ spectra by means of two crystal spectrometers in coincidence.

a)  $^{60}\text{Co}$ .  $\gamma$ -lines from  $^{60}\text{Ni}$ , which follow  $\beta^-$  decay from  $^{60}\text{Co}$  (5.2 y. half life), are emitted in cascade, as pointed out by DEUTSCH, ELLIOT and ROBERTS <sup>(5)</sup>, and their energies, very accurately measured by several workers <sup>(6-7-8-9)</sup>, are  $1.17$  and  $1.33 \text{ MeV}$ .

<sup>(5)</sup> M. DEUTSCH, L. G. ELLIOT and A. ROBERTS: *Phys. Rev.*, **68**, 193 (1945).

<sup>(6)</sup> W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN and V. K. RASMUSSEN: *Phys. Rev.*, **76**, 731 (1949).

<sup>(7)</sup> D. A. LIND, J. R. BROWN and J. W. M. DU MOND: *Phys. Rev.*, **76**, 591 (1949).

<sup>(8)</sup> E. N. JENSEN, L. J. LASLETT and W. W. PRATT: *Phys. Rev.*, **76**, 430 (1949).

<sup>(9)</sup> D. E. ALBURGER: *Phys. Rev.*, **76**, 435 (1949).

Results obtained with the above described apparatus are given in figg. 3, 4 and 5. The energy spectrum of  $\gamma$ -rays, as given by a single crystal spectrometer, is represented in fig. 3 where the peaks due to photoelectric effect by

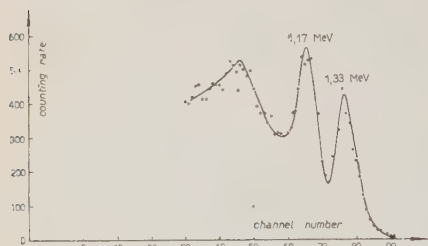


Fig. 3. - Spectrum of  $\gamma$  rays from  $^{60}\text{Co}$ .

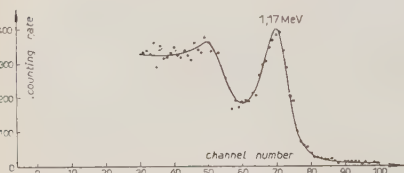


Fig. 4. - Spectrum of  $\gamma$  rays emitted in cascade with 1.33 MeV line from  $^{60}\text{Co}$ .

The spectrum given in fig. 7 was obtained by means of a single crystal spectrometer: the three known  $\gamma$ -lines can be observed, as also the two weak lines corresponding to the crossover transitions towards the ground level of  $^{56}\text{Fe}$ ; their existence was pointed out by BISHOP, WILSON and HALBAN (<sup>13</sup>).

The spectral distribution of pulses which are coincident with the 0.845 MeV  $\gamma$ -line is shown in fig. 8: 1.81 MeV and 2.13 MeV lines are therefore emitted in cascade with the

the two  $\gamma$ -lines and the distribution of Compton recoils are shown. Spectra given in fig. 4 and 5 were obtained with the coincidence arrangement, as described above: in fig. 4 the spectral distribution of pulses coincident with the 1.33 MeV  $\gamma$ -line is shown and in fig. 5 the spectrum obtained when the coincidence circuit is triggered by 1.17 MeV photopeak can be seen; the two lines are therefore clearly separated.

b)  $^{56}\text{Mn}$ . The decay scheme of  $^{56}\text{Mn}$  (<sup>10</sup>), as it results from investigation performed by ELLIOT and DEUTSCH (<sup>11</sup>) and SIEGBAHN (<sup>12</sup>) is given in fig. 6.

The existence of  $\gamma$ -cascades is directly confirmed by our results, which are illustrated in fig. 7, 8 and 9.

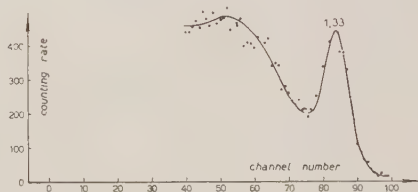


Fig. 5. - Spectrum of  $\gamma$  rays emitted in cascade with 1.17 MeV line from  $^{60}\text{Co}$ .

(<sup>10</sup>) K. WAX *et al.*: *Nuclear Data* (1950), U.S. Department of Commerce - National Bureau of Standards.

(<sup>11</sup>) L. G. ELLIOT and M. DEUTSCH: *Phys. Rev.*, **64**, 621 (1943).

(<sup>12</sup>) K. SIEGBAHN: *Arkiv f. Mat. Astron. Fysik*, **33A**, 10 (1946).

(<sup>13</sup>) G. R. BISHOP, R. WILSON and H. HALBAN: *Phys. Rev.*, **77**, 416 (1950).

0.845 MeV  $\gamma$ -rays. Pulses belonging to this line are not completely eliminated because a fraction of the pulses due to Compton effect by more energetical  $\gamma$ -rays is included in the photopeak of 0.845 MeV line and is consequently used to trigger the coincidence apparatus; but the intensity ratios between these  $\gamma$ -lines turn out to be significantly changed.

Fig. 9 represents the spectrum of the pulses which are coincident with the 1.81 MeV line; only 0.845 MeV  $\gamma$ -rays can be observed and the same result was obtained when the 2.13  $\gamma$ -rays were used as triggering peak.

Relative intensities of the three important  $\gamma$ -lines have been evaluated by measuring the areas of correspondent photoelectric peaks

and taking into account the dependence of the efficiency of the crystal upon the energy of  $\gamma$ -rays; obtained results satisfactorily agree with those which are given in the above mentioned work by SIEGBAHN <sup>(12)</sup>.

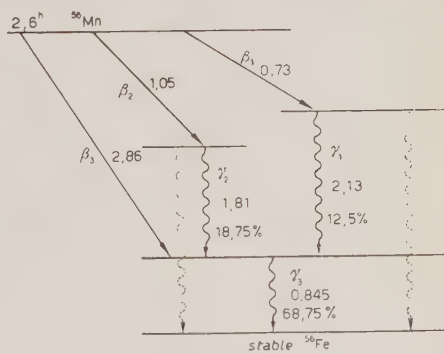


Fig. 6. — Decay scheme of  $^{56}\text{Mn}$ .

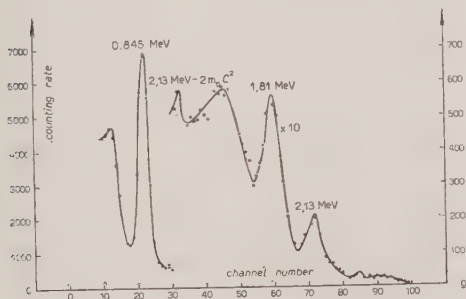


Fig. 7. — Spectrum of  $\gamma$  rays from  $^{56}\text{Mn}$ .

tope  $^{187}\text{Re}$ . Two  $\beta^-$  transitions are known; the former (maximum energy 1.32 MeV) to the ground state of  $^{187}\text{Re}$ , the latter (maximum energy 0.63 MeV) to an excited state of the same isotope. In the subsequent decay from this to the ground state some  $\gamma$  transitions take place.

<sup>(14)</sup> O. MINAKAWA: *Phys. Rev.*, **57**, 1189 (1940).

<sup>(15)</sup> K. FAJANS and W. H. SULLIVAN: *Phys. Rev.*, **58**, 276 (1940).

<sup>(16)</sup> Bibliography till 1952 is collected by: J. M. CORK, M. B. BRICE, W. H. NESTER, J. M. LE BLANC and D. W. MARTIN: *Phys. Rev.*, **89**, 1291 (1953).

e)  $^{187}\text{W}$ . The 24.1 h activity of wolfram has been attributed to  $^{187}\text{W}$  by MINAKAWA <sup>(14)</sup> and by FAJANS and SULLIVAN <sup>(15)</sup>. The decay scheme is complex and has been investigated by several workers with different techniques <sup>(16)</sup>.

Obtained results can be summarized as follows:  $^{187}\text{W}$  decays towards the stable iso-

CORK *et al.* <sup>(16)</sup> observed the existence of seven  $\gamma$ -lines which had not yet been found by other workers: these lines could not be included in the known

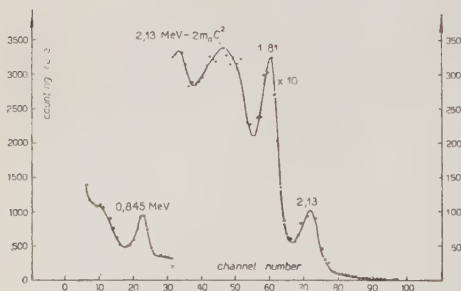


Fig. 8. - Spectrum of  $\gamma$  rays emitted in cascade with 0.845 MeV line from  $^{56}\text{Mn}$ .

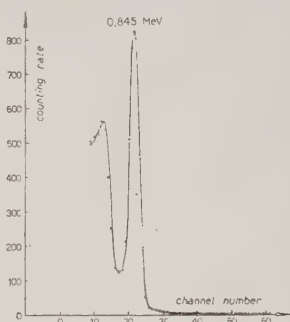


Fig. 9. - Spectrum of  $\gamma$  ray emitted in cascade with 1.81 MeV line from  $^{56}\text{Mn}$ .

decay scheme and in order to interpret them a third  $\beta^-$  transition, whose maximum energy is about 0.32 MeV, had to be invoked.

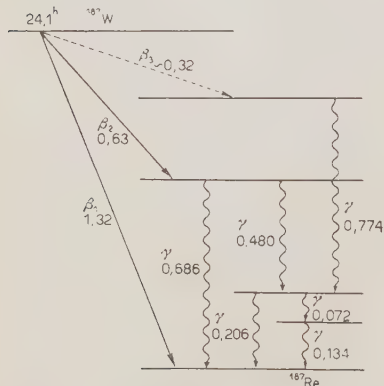


Fig. 10. - Partial decay scheme of  $^{187}\text{W}$ .

In fig. 10 the decay scheme of  $^{187}\text{W}$  is partially reported, as it can be built up according to results obtained by CORK *et al.* <sup>(16)</sup>. The other lines found by these authors complete this decay

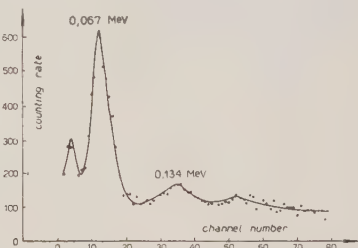


Fig. 11. - Spectrum of  $\gamma$ -rays from  $^{187}\text{W}$  (low energy range).

scheme, but owing to their rather low intensity were not observed by us in most cases; consequently, we did not include them for simplicity. Only the 0.774 MeV line, which is particularly interesting in the discussion of the decay of  $^{187}\text{W}$ , is reported.

Two other lines have been observed: a 0.552 MeV  $\gamma$ -line has been inter-



puted by SUNYAR<sup>(17)</sup> as due to a crossover transition from the 0.686 MeV excited state to the 0.134 MeV state; a 0.619 MeV line can also be included in the decay scheme in fig. 10 if 0.072 MeV and 0.134 MeV transitions are inverted: under this assumption the 0.619 MeV  $\gamma$ -line can be assumed to be emitted in a crossover transition between 0.686 and 0.072 MeV excited states. Such

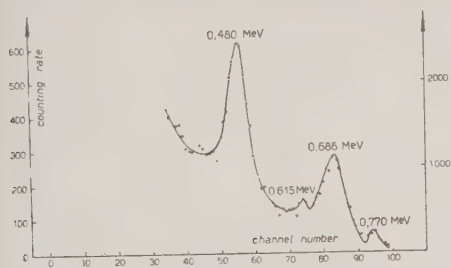


Fig. 12. — Spectrum of  $\gamma$ -rays from  $^{187}\text{W}$  (high energy range).

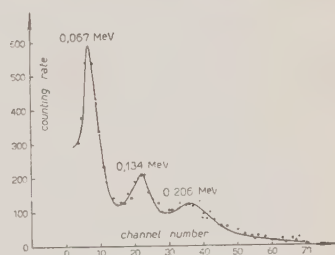


Fig. 13. — Spectrum of  $\gamma$ -rays emitted in cascade with 0.480 MeV line from  $^{187}\text{W}$ .

a hypothesis would however contradict the above mentioned result obtained by SUNYAR, and this line is considered by MULLER *et al.*<sup>(18)</sup>, according to very accurate energy measurements, as belonging to an independent transition.

An analysis of  $\gamma$ -rays emitted from  $^{187}\text{W}$ , performed by SUNYAR<sup>(17)</sup> by means of a scintillation spectrometer and coincidence techniques, has been recently published, while the present investigation was near completion; the conclusions obtained by SUNYAR agree with the results summarized herein.

The spectral distribution of  $\gamma$ -rays from  $^{187}\text{W}$ , as given by a single crystal spectrometer, is shown in fig. 11 and 12. In the low energy range (see fig. 11) three  $\gamma$ -lines were observed: the 0.067 MeV peak can be interpreted as a superposition of 0.072 MeV

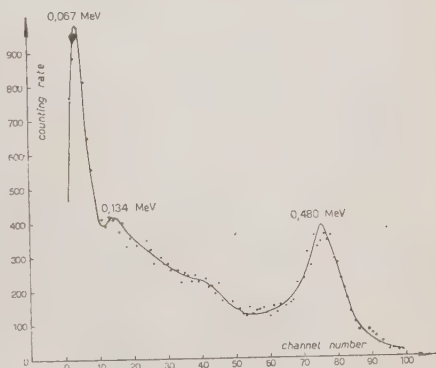


Fig. 14. — Spectrum of  $\gamma$ -rays emitted in cascade with 0.134 MeV line from  $^{187}\text{W}$ .

(17) A. W. SUNYAR: *Phys. Rev.*, **90**, 387 (1953).

(18) D. E. MULLER, H. C. HOYT, D. J. KLEIN and J. W. M. DU MOND: *Phys. Rev.*, **88**, 775 (1952).

$\gamma$ -rays and of characteristic  $^{187}\text{Re}$  X-rays; the small peak at  $\sim 0.040$  MeV which is a spurious one and is due to an effect which is typical of the used detector and will be discussed in section 5b) in connection with the results obtained with radiations emitted from  $^{104}\text{Rh}$ ; 0.134 MeV  $\gamma$ -line is also observed, while the less intense  $\sim 0.200$  MeV line is almost totally hidden in the background of Compton recoils produced by the more energetical  $\gamma$ -rays.

0.480 and 0.686 MeV  $\gamma$ -lines are represented in fig. 12, and representations are also made for two rather weak lines, whose energy were found to be  $\sim 0.78$  MeV and  $\sim 0.62$  MeV: the former line was recently observed by CORK *et al.* <sup>(16)</sup> and it is included in the decay scheme (fig. 10), the latter one was discussed above.

The most intense photopeaks (the ones whose energies are quoted 0.067, 0.134, 0.480 and 0.686 MeV) were in turn used to trigger the coincidence circuit during a more carefully analysis of  $\gamma$ -rays emitted from  $^{187}\text{W}$ . Our results can be summarized as follows.

0.480 MeV line is in cascade with 0.072, 0.134 and 0.206 MeV lines, as it can be deduced from fig. 13; here 0.206 MeV  $\gamma$ -rays are in better evidence because most Compton recoils have been eliminated by means of the coincidence arrangement.

When 0.686  $\gamma$ -line was used as triggering peak, only few X-rays were observed: this observation agrees with results obtained by SUNYAR <sup>(17)</sup> and

can be explained by supposing that a weak  $\gamma$ -line, whose energy is 0.6-0.7 MeV, is coincident with one or some partially converted lines; these  $\gamma$ -rays would consequently be included in the triggering peak. This hypothesis is consistent with the results obtained by CORK *et al.* <sup>(16)</sup>.

The spectrum of  $\gamma$ -rays which are in cascade with the 0.134 MeV  $\gamma$ -line is given in fig. 14 where 0.480 and 0.072 MeV lines are clearly shown. 0.134 MeV line is not completely

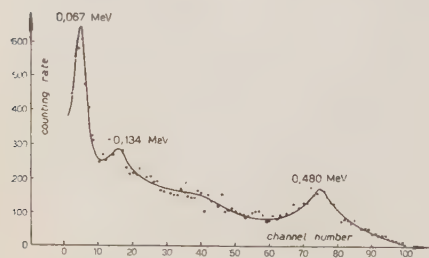


Fig. 15. - Spectrum of  $\gamma$ -rays emitted in cascade with 0.067 MeV peak from  $^{187}\text{W}$ .

absent owing to the superposition of Compton recoils (produced mainly by 0.480 MeV  $\gamma$ -rays) on the 0.134 MeV photoelectric peak.

The spectral distribution of pulses which are coincident with the 0.067 MeV X or  $\gamma$ -rays (see fig. 15) is a test of the preceding results. 0.480 and 0.134 MeV  $\gamma$ -lines are here confirmed to be emitted in cascade with 0.072 MeV line. The decay scheme in fig. 10 is therefore consistent with results discussed here.

We can also observe that, if 0.480 MeV line is supposed to be negligibly converted, a rough evaluation of conversion coefficient in K shell of 0.134 MeV

$\gamma$ -rays can then be attempted. The obtained result is  $\sim 2.5$ , which reasonably agrees with the fact that 0.134 MeV  $\gamma$ -rays are associated with an  $M2$  or ( $M1 + E2$ ) transition ( $^{18-19}$ ).

## 5. - Analysis of $\gamma$ -spectra by means of a single crystal spectrometer.

a)  $^{128}\text{I}$ . The 24.99 min ( $^{20}$ ) activity of  $^{128}\text{I}$  is associated with emission of  $\beta^-$ -particles and  $\gamma$ -rays.  $\beta^-$ -spectrum is complex, as pointed out by several workers ( $^{21-22}$ ), consisting of two components, whose maximum energies are 2.02 MeV and about 1.5 MeV. The higher energy component has been explained as being emitted in a transition to the ground state of  $^{128}\text{Xe}$ , the softer component was assumed to be associated with a transition towards an excited level of the same isotope, about 0.5 MeV above ground level; accordingly emission of  $\gamma$ -rays of this energy has to take place.

No evidence could be found of these  $\gamma$ -rays by BACON, GRISEWOOD, and VAN DE MERWE ( $^{21}$ ), ROBERTS and IRVINE ( $^{23}$ ); LIVINGOOD and SEABORG ( $^{24}$ ) on the contrary observed, by means of absorption measurements, a weak  $\gamma$ -line having an energy of about 0.4 MeV.

SIEGBAHN and HOLE ( $^{22}$ ), using a high transmission lens spectrometer, observed the electron conversion spectrum from a lead radiator: two photoelectric lines were noted and attributed to  $K$  and  $L$  conversion photoelectrons in lead, due to a  $\gamma$ -line whose energy was 0.429 MeV. From this value, the energy difference between the end points of the two above mentioned  $\beta^-$ -spectra could be evaluated; in fact, owing to the weak intensity of the softer  $\beta^-$  component and the unnegligible thickness of the source, the two  $\beta^-$  spectra could not be clearly separately by means of a Fermi plot.

The number of  $\gamma$ -rays emitted for each  $\beta^-$ -particle was also measured by the same workers, and when compared with the total rate of emission of  $\beta^-$ -particles from the source, the intensity of the lower energy component was evaluated at 7%.

Owing to the importance of a measurement of the energy of  $\gamma$  transition for determining the maximum energy of the softer  $\beta^-$  component, we investigated the  $\gamma$ -rays emitted from  $^{128}\text{I}$  by means of a single crystal spectrometer.

( $^{19}$ ) M. GOLDBABER and R. D. HILL: *Rev. of Mod. Phys.*, **24**, 179 (1952).

( $^{20}$ ) D. E. HULL and H. SEELING: *Phys. Rev.*, **60**, 553 (1941).

( $^{21}$ ) R. H. BACON, E. N. GRISEWOOD and C. VAN DER MERWE: *Phys. Rev.*, **59**, 531 (1941).

( $^{22}$ ) K. SIEGBAHN and N. HOLE: *Phys. Rev.*, **70**, 133 (1946).

( $^{23}$ ) A. ROBERTS and J. W. IRVINE: *Phys. Rev.*, **53**, 609 (1938).

( $^{24}$ ) J. J. LIVINGOOD and G. T. SEABORG: *Phys. Rev.*, **54**, 775 (1938).

Our results are illustrated in fig. 16: the energy of the  $\gamma$ -line was found to be 0.436 MeV, when its photopeak was compared with the corresponding peaks due to the well known 0.411 MeV line from  $^{198}\text{Au}$  and 0.662 MeV line from  $^{137}\text{Cs}$ . The continuous pulse distribution characterized by a maximum at 0.170 MeV or thereabout is to be attributed partly to Compton recoil

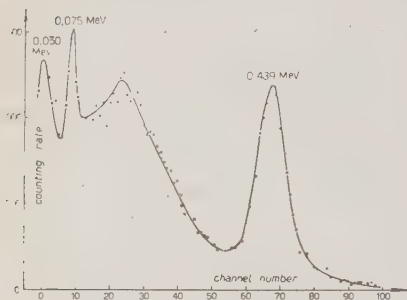


Fig. 16. - Spectrum of  $\gamma$ -rays from  $^{128}\text{I}$ .

electrons of the investigated  $\gamma$ -line, partly to production of bremsstrahlung by  $\beta^-$ -particles, and partly to  $\gamma$ -rays which are detected in the crystal after having undergone Compton scattering within the source which had to be made rather thick owing to the weak intensity of the  $\gamma$ -line.

The peak at 0.075 MeV is to be attributed to characteristic X-rays from Pb which was used to screen the detector from cosmic background. The  $\sim 0.030$  MeV peak corresponds to X-rays emitted either from  $^{128}\text{Xe}$  or from  $^{128}\text{Te}$ , or more probably from both, because the resolution of the spectrometer was not so good as to make these two possibilities distinguishable. In the former case X-rays may be interpreted as due to internal conversion of 0.436  $\gamma$ -line, in the latter case as emitted after a  $K$  capture process which takes place with about 5% probability, as observed by REYNOLDS<sup>(25)</sup> during a series of measurements accomplished by means of a mass spectrograph. The continuous background of  $\gamma$ -rays, due to the above mentioned reasons, does not make it possible to verify these conclusions more exactly; otherwise it should have been possible, for instance, to measure the conversion coefficient of 0.436 MeV  $\gamma$ -rays and to compare our results with the theoretical value.

b)  $^{104}\text{Rh}$ . As it is well known,  $^{104}\text{Rh}$  can be produced in an  $(n, \gamma)$  process in  $^{103}\text{Rh}$ . Two isomeric states were observed, whose energies probably differed within less than 0.1 MeV. Radiations emitted in the decay of  $^{104}\text{Rh}$  have been studied by several authors; some of the obtained results could not be unanimously

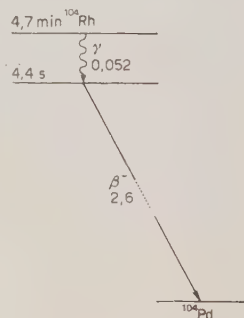


Fig. 17. - Proposed decay scheme of  $^{104}\text{Rh}$

(25) J. H. REYNOLDS: *Phys. Rev.*, **79**, 243 (1950).



interpreted and sometimes disagreed with each other. The decay scheme is given in fig. 17 <sup>(19)</sup>: informations available can be summarized as follows. Of the two above mentioned isomeric states, the excited one decays with a 4.7 min half life; and the emission of soft radiations ( $\gamma$  and X-rays and electrons), associated with this half life, was observed. The ground level of  $^{104}\text{Rh}$  shows a 44 s activity and correspondingly  $\beta^-$ -particles are emitted, whose maximum energy is 2.6 MeV. Such a  $\beta^-$ -spectrum is generally considered to be simple, that is to say no  $\gamma$ -rays are assumed to be simultaneously emitted; the final nucleus is therefore  $^{104}\text{Pd}$  in its ground level.

The hypothesis of one or more  $\beta^-$  transitions, having an appreciable intensity, from the excited level of  $^{104}\text{Rh}$  to one or more level of  $^{104}\text{Pd}$  has been discarded on account of results obtained by CRITTENDEN <sup>(26)</sup> who investigated the  $\beta^-$ -spectra associated with the two activities and found them to be identical. This result is consistent with the fact that  $\beta^-$  emissions take place in every case from the ground level of  $^{104}\text{Rh}$ , at first with a 44 s half life and then, when radioactive equilibrium is reached, with the 4.7 min half life.

The possibility of a  $K$  capture process leading to  $^{104}\text{Ru}$  seems also to have been excluded by AGENO <sup>(27)</sup>. This author made use of a method of selective absorption of X-rays associated with the 4.7 min activity and concluded that X-rays are characteristic of Rh atom, as it might be expected if only the isomeric transition takes place.

$\gamma$ -rays were found to be emitted in connection with the 41 s half life, but were later attributed only to bremsstrahlung <sup>(28)</sup>.  $\beta^-$ -spectrum having a maximum energy of 2.6 MeV was therefore supposed to be emitted only in a transition towards the ground level of  $^{104}\text{Pd}$  <sup>(19)</sup>. A  $\gamma$ -line was recently observed by MAEDER and PREISWERK <sup>(29)</sup> by means of a crystal spectrometer and its energy measured as 0.55 MeV; another very weak line, whose energy is  $1.1 \pm 0.1$  MeV, was observed by the same authors, but can be also attributed to bremsstrahlung <sup>(30)</sup>.

The spectrum of conversion electrons associated with the 4.7 min half life has been investigated by many authors <sup>(27-31-32-33)</sup>, by means of absorption method, as also by HOLE <sup>(34)</sup> who used a  $\beta$ -spectrograph. These electrons have been interpreted as belonging to  $K$  and  $L$  conversion lines having an

<sup>(26)</sup> E. C. CRITTENDEN jr.: *Phys. Rev.*, **56**, 709 (1939).

<sup>(27)</sup> M. AGENO: *Nuovo Cimento*, **1**, 415 (1943).

<sup>(28)</sup> B. N. CACCIAPUOTI: *Nuovo Cimento*, **4**, 31 (1947).

<sup>(29)</sup> D. MAEDER and P. PREISWERK: *Helv. Phys. Acta*, **24**, 625 (1951).

<sup>(30)</sup> D. MAEDER: private communication.

<sup>(31)</sup> B. PONTECORVO: *Phys. Rev.*, **54**, 542 (1938).

<sup>(32)</sup> Z. OLLANO: *Ric. Scient. Ricostruz.*, **11**, 568 (1940).

<sup>(33)</sup> A. FLAMMERSFELD and O. BRUNA: *Zeits. f. Naturf.*, **2a**, 241 (1947).

<sup>(34)</sup> N. HOLE: *Arkiv f. Fysik*, **34**, 5 (1947).

energy of about 0.080 MeV. DER MATEOSIAN and GOLDBABER<sup>(35)</sup> however, measured the energy of the isomeric transition by means of a crystal spectrometer and found it to be 0.052 MeV; from that they concluded that the electron line interpreted by HOLE as a *K* conversion line of a 0.080 MeV  $\gamma$  transition should be considered as a *L* conversion line of 0.052 MeV  $\gamma$ -rays.

A single crystal spectrometer was used by us to investigate the  $\gamma$ -spectrum associated with the 44 s half life.  $\gamma$ -rays observed by MAEDER and PREISWERK<sup>(29)</sup> have been confirmed and their energy, after a comparison with the 0.411 MeV from  $^{198}\text{Au}$  and 0.662 MeV line from  $^{137}\text{Cs}$ , resulted to be 0.552 MeV, in fair agreement with the value obtained by the above mentioned authors. This result is illustrated in fig. 18. No other more energetical line of appreciable intensity was observed.

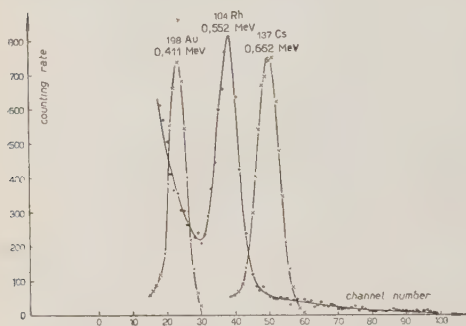


Fig. 18. - Energy measurement of high energy  $\gamma$ -rays from  $^{104}\text{Rh}$ .

The analysis of the spectrum in the low energy region is not so easy owing to bremsstrahlung caused by  $\beta$ -particles, but it may be surely concluded that no other  $\gamma$ -line, with comparable intensity (for instance emitted in cascade with the 0.552 MeV  $\gamma$ -rays), is emitted in the range of energies higher than 0.2 MeV. The half life associated with the 0.552 MeV line was  $\sim 40$  s; owing to its rather weak intensity no more accurate measurement

was possible, but the possibility that such  $\gamma$ -rays can be emitted from an impurity contained in our Rh samples can definitively be discarded. X and  $\gamma$ -radiations emitted in the decay of isomeric state have been studied with the same method. The linear response of the spectrometer in the low energy region has been verified by means of a calibration with X-rays from  $^{137}\text{Ba}$  (0.033 MeV) and  $^{198}\text{Hg}$  (0.071 MeV) following conversion processes in  $^{137}\text{Cs}$  and  $^{198}\text{Au}$  respectively, and the energies of the two lines emitted from  $^{104}\text{Rh}$  were 0.022 and 0.051 MeV. The former value corresponds, within experimental error, to the energy characteristic of X-rays from Rh, the latter one agrees with the above mentioned result obtained by DER MATEOSIAN and GOLDBABER. It seems therefore natural to suppose the 0.051 MeV  $\gamma$ -line as being emitted in the isomeric transition to the ground state of  $^{104}\text{Rh}$  and the 0.022 MeV line as being due to *K* conversion of the same  $\gamma$ -rays. Arguments were found however to reject such a conclusion, as will be discussed later.

<sup>(35)</sup> E. DER MATEOSIAN and M. GOLDBABER: *Phys. Rev.*, **82**, 115 (1951).

Experimental conditions were favourable to make an attempt of measuring the  $K$  conversion coefficient because  $^{104}\text{Rh}$  does not emit intense  $\gamma$ -lines of higher energy, which would give rise to a background of Compton electrons in the low energy region of the spectrum, and bremsstrahlung radiation produced by hard  $\beta$ -particles is no more important when measurements are taken a few minutes after the end of the irradiation of the sample, so that  $\beta$ -activity which is associated with the 44 s half life is reduced to a negligible extent.

In order to determine with a satisfactory degree of accuracy the intensity ratio of the two lines, measurements of the spectral distribution of the pulses were performed with different Al absorbers being interposed between  $\gamma$ -emitter and detector; in this way our results could be correctly extrapolated in the case of negligible thickness of the Al container of the crystal. Two examples of the obtained spectra are given in figg. 19 and 20. The thicknesses of the

Al absorbers are mentioned in figure. In the conditions under which the spectrum given in fig. 20 was obtained, the

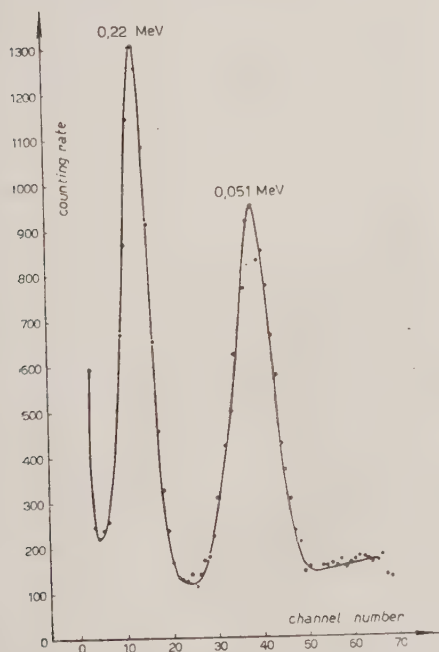


Fig. 19. - Low energy radiation from  $^{104}\text{Rh}$  ( $145 \text{ mg cm}^{-2}$  Al absorber).

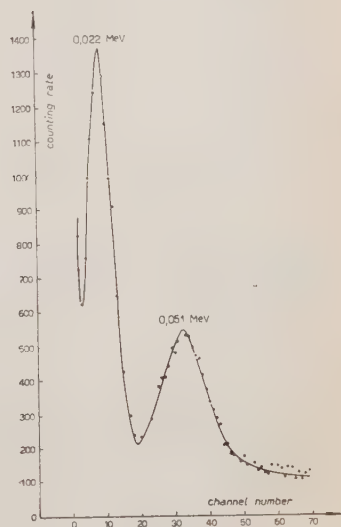


Fig. 20. - Low energy radiation from  $^{104}\text{Rh}$  ( $5.5 \text{ mg cm}^{-2}$  Al absorber).

crystal was wrapped in a  $5.5 \text{ mg cm}^{-2}$  Al sheet only, and not assembled as described in section 3. The deterioration of NaI, when it was not carefully

sheltered from damp atmospheric air, is not so quick as not to permit some hours of reliable measurements.

The measured ratio between the intensities of the two lines is to be corrected by taking into account an effect which was already mentioned in section 4 a), where obtained results in the case of  $^{187}\text{W}$  are discussed. When low energy quanta, which are absorbed mainly near the surface of the crystal, are investigated, it was found probable that X-rays emitted from iodine as a consequence of photoelectric absorption might escape from the crystal; in this case the pulse height is no more proportional to the whole amount of energy  $h\nu$  released by the  $\gamma$  quantum in the crystal, but only to the energy  $h\nu - E_K$ , where  $E_K$  is the characteristic energy of the  $K$  shell in iodine. Consequently a monochromatic line of 0.051 MeV  $\gamma$ -rays will give rise to two peaks, whose energies are 0.051 MeV and about  $0.051 - 0.029 \sim 0.022$  MeV, the energy of characteristic X-rays from iodine being about 0.029 MeV.

A spurious peak is therefore superposed to the 0.021 MeV line corresponding to X-rays from Rh and its contribution must be subtracted. This correction was done as follows: if  $I_{22}$  and  $I_{51}$  are the true intensities of the two lines and  $\bar{I}_{22}$  and  $\bar{I}_{51}$  the observed ones and  $\alpha$  is the escape probability of X-rays, we can write:

$$I_{22} = \bar{I}_{22} - \alpha I_{51} \quad I_{51} = \bar{I}_{51} + \alpha I_{51}$$

and therefore

$$\frac{I_{22}}{I_{51}} = (1 - \alpha) \frac{\bar{I}_{22}}{\bar{I}_{51}} + \alpha$$

When the Al layer interposed between Rh sample and detector is so thick that 0.022 X-rays have a negligible probability of reaching the crystal, we obtain

$$\frac{I_{22}}{I_{51}} = 0$$

and consequently

$$\frac{\bar{I}_{22}}{\bar{I}_{51}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

This ratio, if measured with an Al absorber of about  $2000 \text{ mg cm}^{-2}$ , and with a 2.5 cm side crystal, was calculated as 0.205, and an escape probability  $\alpha = 0.17$  was hence deduced.

The «true» values of the ratio  $I_{22}/I_{51}$  can be therefore obtained from the



measured ones according to the formula

$$\frac{I_{22}}{I_{51}} = 0.83 \frac{\bar{I}_{22}}{\bar{I}_{51}} - 0.17.$$

Measurements were performed making use of rather thick Rh samples ( $\sim 100$  or  $\sim 200$   $\text{mg cm}^{-2}$ ) and a correction is necessary in order to take the self-absorption into account; in this calculation absorption coefficients for 0.022 MeV and 0.051 MeV radiations from Rh were assumed to be 11.2 and 8.2  $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$  respectively. These values were obtained by means of interpolation of the known curves for molybdenum and silver. The correction was found to be 20% for a 103  $\text{mg cm}^{-2}$  Rh sample. This was experimentally tested and results were found to be in satisfactory agreement with the previously mentioned evaluation.

The dependence of ratio  $I_{22}/I_{51}$  upon the thickness of Al absorber, when experimental values have been extrapolated to zero thickness of Rh sample, is represented in fig. 21. In order to take into account the appreciative thickness of Al absorber, a second extrapolation has been made and the «true» ratio between the intensities of 0.022 and 0.051 MeV line obtained as it would have been measured by means of a bare crystal. The «true» ratio was found to be 1.52.

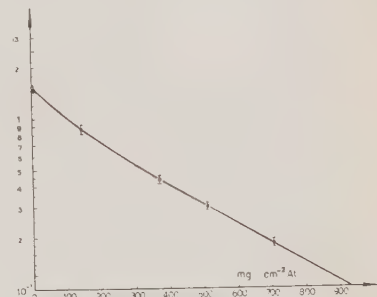


Fig. 21. —  $I_{22}/I_{51}$  ratio versus thickness of Al absorber.

The conversion coefficient in the  $K$  shell for 0.051 MeV  $\gamma$ -rays can be obtained from the preceding result, when corrected for the probability that Auger effect takes place in the  $K$  shell instead of the emission of X-rays. Auger electrons are emitted with a 25% probability, as discussed by AGENO<sup>(27)</sup> and FLAMMERSFELD and BRUNA<sup>(33)</sup>; consequently the  $K$  conversion coefficient can be assumed to be 1.90. Experimental error is believed to be less than 10%.

The above discussed result is to be compared with the value obtained by AGENO<sup>(27)</sup>. This is  $\sim 0.7$  and the disagreement cannot be explained by the fact that the energy of  $\gamma$ -rays emitted from  $^{104}\text{Rh}$  was 0.080 MeV in his work, while it was 0.051 in the present work, because if somewhat different absorption coefficients in Rh and Al were chosen, the new values of absorption coefficients introduced into Ageno's formulae would make the difference still larger.

Two interesting circumstances may however be pointed out:

- 1) A systematic disagreement seems to exist between the values of the energy of  $\gamma$ -rays from  $^{104}\text{Rh}$ , which are obtained from the measurements taken

by electron absorption methods or by means of a conversion spectrograph, and the values obtained by DER MATEOSIAN and GOLDBABER <sup>(35)</sup> and by us with a scintillation spectrometer.

2) If conversion coefficients, as given by DANCOFF and MORRISON <sup>(36)</sup>, are compared with the experimental values obtained by AGENO and in the present work, it may be concluded that the investigated isomeric transition is to be considered probably of the  $E1$  or  $M2$  type (when the half life is also taken into account, as done by AGENO, the  $M2$  character of the transition seems more probable). But the disagreement is rather striking when an  $M3$  or  $E3$  character is assumed for this transition, as it is by GOLDBABER and SUNYAR <sup>(37)</sup> and GOLDBABER and HILL <sup>(19)</sup> and as on the basis of nuclear shell theory.

The hypothesis can be attempted that the isomeric transition might consist of a two-step transition and that highly converted  $\gamma$ -rays of about 0.080 MeV might be emitted in one of the two steps. This should remain however a mere hypotetic assumption, if no further investigation of  $\gamma$ -rays and electrons emitted in the considered transition is carried out.

In order to be able to give also an interpretation of the 0.552 MeV  $\gamma$ -line observed by MAEDER and PREISWERK <sup>(29)</sup> and by us, we intend to consider the present work as a preliminary investigation about the decay of  $^{104}\text{Rh}$  and to reconsider the problem by means of more suitable techniques.

When the present paper was ready for publication, we were informed of the results obtained by JORDAN, CORK and BURSON <sup>(38)</sup>. These authors investigated the conversion electron spectrum associated with the 4.7 min half life by means of  $180^\circ$  constant field conversion electron spectrometers, and the  $\gamma$ -rays by means of a single crystal spectrometer and  $\gamma$ - $\gamma$  coincidence technique. If compared with the results which have been obtained also in our work, the agreement is quite satisfactory.

Conversion electrons from two  $\gamma$ -lines were observed by JORDAN, CORK and BURSON: the 0.051 MeV line is confirmed and interpreted as probably emitted in a  $M1$  transition; it is consequently expected to be only partly converted. Evidence for a highly converted 0.077  $\gamma$ -line emitted in a  $E3$  transition is obtained from the electron conversion spectra and from the results of coincidence work. The 4.7 min isomeric state of  $^{104}\text{Rh}$  appears consequently to decay with a two-step transition.

This latter work appears therefore conclusive regarding the problem of

<sup>(36)</sup> S. M. DANCOFF and P. MORRISON: *Phys. Rev.*, **55**, 122 (1939).

<sup>(37)</sup> M. GOLDBABER and A. W. SUNYAR: *Phys. Rev.*, **83**, 906 (1951).

<sup>(38)</sup> W. C. JORDAN, S. M. CORK and S. B. BURSON: *Phys. Rev.*, **90**, 862 (1953).

the decay of  $^{104}\text{Rh}$ : the difficulties pointed out in our preceding conclusions are evidently explained in a satisfactory way.

### Aknowledgments.

The authors wish to thank Prof. G. BOLLA for his interest in the present work, and Drs. U. FACCHINI, E. GATTI and A. BRACCI for their useful suggestions and continuous interest.

### RIASSUNTO

Un metodo di coincidenza tra due spettrometri a scintillazione a un cristallo, adatto per lo studio degli schemi di decadimento di isotopi radioattivi, è stato sviluppato e usato per le radiazioni  $\gamma$  emesse dal  $^{60}\text{Co}$ , dal  $^{56}\text{Mn}$  e dal  $^{187}\text{W}$ . Gli spettri  $\gamma$  dello  $^{128}\text{I}$  e del  $^{104}\text{Rh}$  sono pure studiati con uno spettrometro a un cristallo.

## Ultrasonic Grating Remaining After the Stopping of the Ultrasonic Waves. (IV)

A. CARRELLI and F. PORRECA

*Istituto di Fisica dell'Università - Napoli*

(ricevuto il 31 Luglio 1953)

**Summary.** (\*) — Besides the condition of standing waves, a necessary and sufficient condition for the persistence of the diffracted lines of even order is that at the stopping of the ultrasonic waves in the liquid should remain a phase grating formed by the periodic variation of the refraction index in correspondence with the solid particles which come to lie in the nodal planes. The theoretical order of magnitude of this  $\Delta n$  ( $\cong 10^{-6}$ ) is given with reference to the value of the refraction index of the pure liquid, and its value is measured experimentally. From the measurements of the duration  $t_p$  of the effect in time intervals following the instant of filling the vessel with the substance subjected to ultrasonics, the falling velocity of the suspended particles is determined. Finally relation is given of a new effect strictly related to the one studied in the present as in the preceding notes, i.e. that as, under suitable experimental conditions, the diffraction lines of even order remain visible after stopping the ultrasonic waves, so one observes during the action of the ultrasonic waves, for the diffracted lines of the lower orders, an increased intensity of those of even order and for the lines of higher order the presence of those of even order only.

---

(\*) Editor's translation.

In preceding notes (<sup>1-3</sup>) we already stated that for the couples of substances able to give the persistence of diffracted lines at the stopping of the ultrasonic waves, the presence of a regime of standing waves is the necessary condition.

---

(<sup>1</sup>) A. CARRELLI and F. PORRECA: *Nuovo Cimento*, **9**, 90 (1952).

(<sup>2</sup>) A. CARRELLI and F. PORRECA: *Nuovo Cimento*, **10**, 98 (1953).

(<sup>3</sup>) A. CARRELLI and F. PORRECA: *Nuovo Cimento*, **10**, 883 (1953).



In fact the concentration of particles in suspension in the nodal planes equidistant from each other by  $\lambda/2$ , and then the persistence of diffracted lines at the stopping of the ultrasonic waves, are actually due to the presence of standing waves.

That condition, however, is not sufficient to foresee the effect in general, that is to say for any suspension whatever of solid particles in a liquid. In fact, though in the state of standing waves, there are couples of substances that do not show the effect, such as starch in benzol, polyvinyl alcohol in water, or  $\text{BaSO}_4$  in ethyl alcohol. The condition sufficient for the effect is easily found if one thinks that a transparent medium crossed by light being in question, one may have, at the stopping of the ultrasonic waves, a diffraction image only if a phase grating remains in the liquid; that is if there is in the liquid a periodic variation of the refraction index.

As in the condition of standing waves the solid particles in suspension are collected in planes equidistant from each other by  $\lambda/2$ , the effect occurs only with those couples of substances for which that condition alters the refraction index of pure liquid.

More exactly, in our case it should occur that, to the peculiar stratification taken by the particles in suspension, there should correspond a periodical distribution of the refraction index, which originates the diffraction image already observed. The effect takes the time necessary for the destruction of the peculiar disposition taken by the particles under the action of the ultrasonic waves.

Of course, the experimental confirmation is necessary in order to agree wholly on what has been said above: that is to say it must be brought in evidence a variation of the refraction index between the couples of substances showing the effect and the pure liquid; on the contrary, that variation of the index should be missing in those couples which do not show the effect.

At this moment it is convenient to foresee, first of all, the value of measure of the refraction index, necessary for the phenomenon of diffraction with the phase grating in liquid mediums. To obtain this value, we can, of course, refer to the value of the index variation  $\Delta n$  necessary to the ultrasonic waves for the appearance of the diffracted lines. The experiment proves, for instance, that the small emission power of quartz of  $0,1 \text{ watt/cm}^2$  is already sufficient for the appearance of the diffracted lines with the ultrasonic waves in water. It may be easily calculated, in this case <sup>(4)</sup>, that one has the highest variation of the refraction index equal to  $7 \cdot 10^{-6}$ .

For the measurement of such small variations of the refraction index we

---

(4) R. LUCAS and P. BIQUARD: *Journ. de Phys.*, **7**, 472 (1932).

used an experimental device already largely used in other fields by other authors, such as A. TISELIUS<sup>(5,6)</sup>, H. THEORELL and L. G. LONGSWORTH<sup>(7)</sup>.

This device (\*) is formed by (fig. 1) a slit  $S$  lighted by a source of monochromatic light, the image of which is given by the lens  $D$  in the plane  $P$ , where is a diaphragm furnished with an edge parallel with the slit  $S$ ; this diaphragm can be mechanically moved upwards in a uniform motion. Very near the lens  $D$ , between it and the plane  $P$ , is placed the smooth-parallel-glass-faced dish  $E$ , containing the substance under examination, in a suitable thermostat. Immediately after the diaphragm  $P$  is situated the lens  $O$  of a camera giving an image of the dish—almost of the same dimensions of the object—in the plane  $G$ , where is either a ground glass or the photographic plate. In this plane the lighted zone is limited, by a proper screen, up to a thin vertical streak and the chassis can slide in a uniform motion synchronous with the movement, perpendicular to it, of the diaphragm situated in the plane  $P$ .

In absence of the variation of the refraction index—should you fill, for example, the dish with an homogeneous liquid—all the light converges to the image of the slit—which is formed in the plane  $P$  on the principal optical axis—and enters the lens  $O$ , as is shown by the direction of the rays traced in fig. 1.

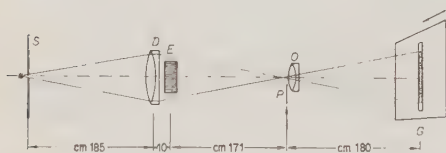


Fig. 1. — 1) The arrow in the plane  $P$  shows the upward direction of the diaphragm motion. 2) The arrow in the plane  $G$  shows the direction of the motion of the sensitive plate normal to the paper. 3) The dashed portion of  $G$  shows the illuminated portion when diaphragm and chassis are at rest.

At a certain moment, a thin vertical light streak will be visible in the plane  $G$ , with the help, for example, of a ground glass. In sliding the diaphragm and the chassis there will be light till the diaphragm  $P$  intercepts the image of the slit  $S$ . Evidently, in these conditions, the photographic impression of the successive position of the lighted zone in the plane

$G$  originates an image on the plate, as the one given in fig. 2 by the dashed zone.

Let us suppose, on the contrary, that in the liquid contained in the dish there is an horizontal layer showing a variation of the refraction index: in this case, the luminous rays crossing that zone of the dish do not follow

<sup>(5)</sup> A. TISELIUS, G. E. HENSCHEN and H. SVENSSON: *Biochem. Journ.*, **32**, 1814 (1938).

<sup>(6)</sup> A. TISELIUS and E. A. KABAT: *Journ. Exper. Medicine*, **69**, 119 (1939).

<sup>(7)</sup> L. G. LONGSWORTH: *Journ. Amer. Chem. Soc.*, **61**, 529 (1939).

<sup>(8)</sup> L. G. LONGSWORTH and MAC INNES: *Chem. Rev.*, **24**, 271 (1939).

the incidence direction, but bend. This deviation is the greater the higher is the variation of the index. Its consequence is that those luminous rays no longer converge to the image of the slit on the optical axis in the plane  $P$ , and so they are intercepted by the diaphragm and no longer reach the screen  $G$ . In this case, a zone of a liquid showing, for example, a maximum of variation

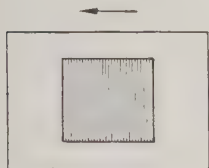


Fig. 2.

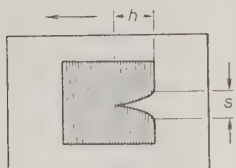


Fig. 3.



Fig. 4.

In these figures the arrows show the direction of the plate-motion.

of the refraction index—in comparison with the constant one of the remaining mass—corresponds to a dark stripe in a lighted zone on the sensitive film, as is shown in fig. 3.

The base  $s$  of the peak is proportional to the thickness of the zone giving the variation of the refraction index; its height  $h$  is proportional to the angular deviation of the luminous rays crossing the zone of the liquid with a different refraction index. The great sensibility of such a method of measurement consists in the fact that  $h$ , being the deviation angle  $\alpha$  of the luminous rays a constant, is the greater, the higher are the distances, almost equal, between the dish and the lens  $O$ , and between this latter and the screen  $G$ .

With regard to the researches of our studies, we filled the dish with very concentrate solutions of solid particles in liquid, and we waited for them to deposit at the bottom, so as to have on the dish a zone entirely opaque to the light, a demarcation zone between this and the liquid phase, and at last the pure liquid.

Let us remember that, in our case, in order to confirm what has been said at the beginning of this work, the question is to bring into evidence the existence of a variation of the refraction index, with regard to the liquid only, in the substances showing the effect, and to prove its absence in the ones which do not show it.

In the second case, the photographic impression should give a figure on the plate, as shown in fig. 2, with the only one evident difference—under the same condition of experiment—of a lower height of the lighted zone, because of the presence of the opaque sediment on the bottom of the dish. Considering this, in the first case, a dark figure should, on the contrary, be obtained in correspondence with the solid-liquid limit as shown in fig. 4.

The results obtained allow us to confirm our forecasts. With starch in benzol, a couple of substances not showing the effect, we obtained an impression as shown in fig. 2a. On the contrary with starch in  $H_2O$ ,  $HgCl$  in  $H_2O$ , and  $BaSO_4$  in  $H_2O$  we obtained impressions as the one in fig. 4a. Starting

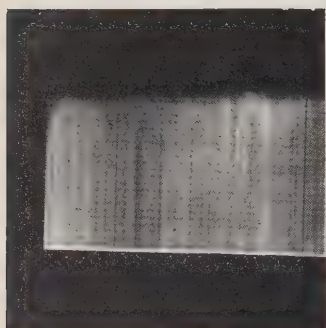


Fig. 2 a).

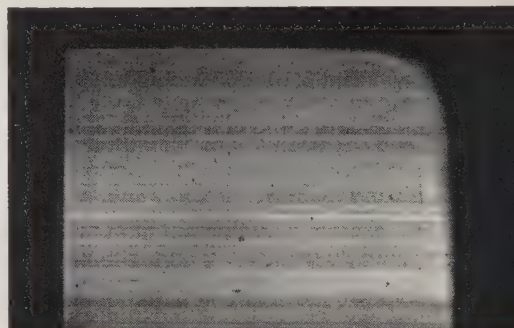


Fig. 4 a).

from them, by measuring  $h$  and knowing the dimensions of the device, the deviation angle  $\alpha$  of the luminous rays may be easily valued, with a fair approximation. On the other hand, this deviation angle from the incident direction, of a ray of light—bending owing to the presence of a variation of the refraction index  $\Delta n$ —is given by the formula <sup>(9)</sup>  $\operatorname{tg} \alpha = 4\sqrt{n_0} \cdot \Delta n$ , where  $n_0$  is the refraction index of the means under examination. The  $\Delta n$  may be, that way, determined, but it is subject to a big error.

The values obtained are given in table I.

TABLE I.

Examined substances	$\Delta n \cdot 10^6$
Starch in water . . . . .	$3,3 \pm 1,5$
$BaSO_4$ in water . . . . .	$2,7 \pm 1,2$
$HgCl$ in water . . . . .	$0,8 \pm 0,5$

It is now convenient to remind that, during the development of our researches and experiments, we always supposed that the concentration of the mixtures should remain constant. In reality, however, that is true only in

<sup>(9)</sup> R. LUCAS and P. BIQUARD: *Journ. de Phys.*, **7**, 475 (1932).



a first approximation, for, after a certain time, the particles in suspension deposit on the bottom: the duration of that settling, however, is comparatively long, with regard to the time of our observation, because their falling speed is very limited.

To measure this falling speed, we measured the duration  $t_p$  of the diffracted lines at the stopping of the ultrasonic waves, at constant time intervals following

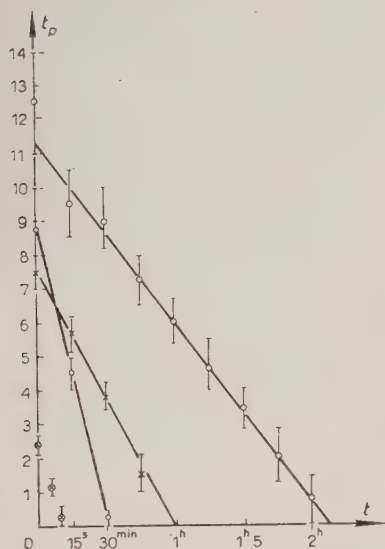


Fig. 5. —  $\circ$  Starch in  $H_2O$ ;  $\times$   $BaSO_4$  in  $H_2O$ ;  $\bullet$   $HgCl$  in  $H_2O$ ;  $\otimes$  Polyvinyl alcohol in ethyl alcohol.

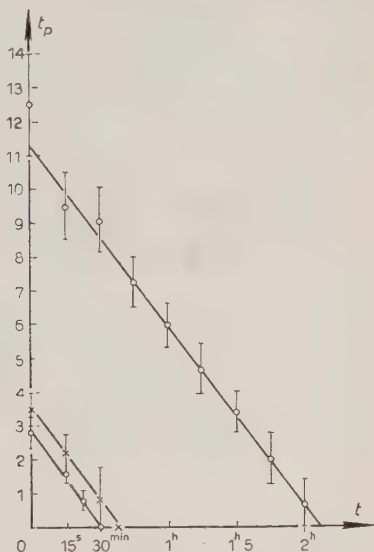


Fig. 6. —  $\circ$  Starch in  $H_2O$ ;  $\times$  Starch in ethyl alcohol;  $\bullet$  Starch in methyl alcohol.

the filling moment of the dish, till when, without agitating the liquid, the effect disappears and the liquid appears to be without particles in suspension.

In fig. 5 are shown the curves obtained for the substances examined, assuming over on the ordinates the persistence duration  $t_p$  of the lines in the various determinations taken at constant times, from the filling moment of the dish. These times  $t$  are carried over on the abscissae. We examined couples of substances of the same concentration and the experiments are relative to ultrasonic waves of the same frequency, duration and power.

In fig. 6 are particularly carried over the analogous curves for starch in water, in ethyl alcohol and in methyl alcohol. These curves, with a fair approximation, have a development parallel to each other.

Evidently, the falling time of all the particles on the bottom of the dish

containing the liquid, is measured by the value of the abscissa from the intersection point of these curves with the abscissa axis. Considering the depth of the liquid under examination, it is easy to obtain an approximative value of the falling speed of the particles, supposing them all to be equal to one another. The data obtained are given in table II.

Before concluding this note, we want to add that the substances showing the effect of the persistence of the diffracted lines, at the stopping of the ultrasonic waves, show another effect which might be called the inverse effect to the preceding one.

This latter consists in the fact that, after exciting the ultrasonic waves and obtaining the condition of standing waves, one observes after a few seconds

TABLE II.

Examined substances	$V(\text{cm/h})$
Starch in water . . . . .	$2,35 \pm 1,00$
Starch in ethyl alcohol . . . . .	$8,00 \pm 2,2$
Starch in methyl alcohol . . . . .	$10,0 \pm 4,5$
HgCl in water . . . . .	$10,0 \pm 4,0$
BaSO <sub>4</sub> in water . . . . .	$5,20 \pm 1,5$
Polyvinyl alcohol in ethyl alcohol	$27,0 \pm 8,5$

and always with the ultrasonic waves in action, the formation of more diffracted lines of a superior order. More particularly, one clearly observes, for the superior orders, that the intensity of an even order line is greater than the one referring to the immediately preceding odd order line. Moreover, with still higher order lines, the odd ones are missing, and only the higher even order lines are present, of course with the ultrasonic waves still in action.

The substances more conspicuously showing this effect are starch in H<sub>2</sub>O and BaSO<sub>4</sub> in H<sub>2</sub>O. Fig. 7 represents a microphotometry of a diffraction image obtained during the emission of the ultrasonic waves, with a frequency  $\nu = 1.785$  MHz in starch and H<sub>2</sub>O,  $c = 0.2$  g/litre. From this figure one can easily see that the sixth eighth and tenth order lines are respectively intenser than the fifth seventh and ninth order ones.

It is no use to specify that, of course, this does not occur during the emission of the ultrasonic waves in the liquid only, as is shown by the intensity values of the diffracted lines, taken from the various authors (HIEDEMANN, BERGMANN).

Then we can conclude that the presence of peculiar material particles, as starch, BaSO<sub>4</sub>, HgCl, polyvinyl alcohol, produces, in its vicinity, a modification of the refraction index of the liquid containing it. Consequently, the

distribution of the intensity of the diffraction lines, with standing ultrasonic waves, is different from the theoretic one occurring with the liquid only, as we

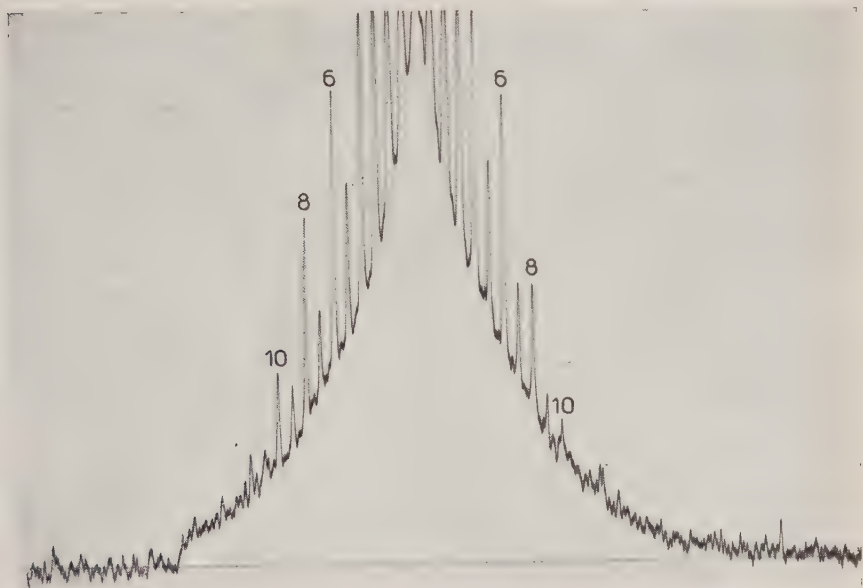


Fig. 7.

already said above while speaking of the inverse effect, and as we proved in a preceding note too <sup>(10)</sup>.

This variation of the refraction index, in a regime of stationary ultrasonic waves, lasts for a certain time, after the stopping of the ultrasonic waves, originating the persistence of the even order diffracted lines, till the particles aggregating in the nodal planes destroy this peculiar disposition because of their weight and of the convective motions in the liquid, owing to a thermal effect.

<sup>(10)</sup> A. CARRELLI and F. PORRECA: *Nuovo Cimento*, **10**, 100 (1953).

## RIASSUNTO

Oltre alla condizione di onde ultrasonore stazionarie, è condizione necessaria e sufficiente, per la persistenza delle righe diffratte di ordine pari, che, al cessare degli ultrasuoni rimanga in seno al liquido un reticolo di fase, costituito dalla variazione periodica dell'indice di rifrazione in corrispondenza delle particelle solide in sospensione nei piani nodali. Si dà l'ordine di grandezza teorico di tale  $\Delta n$  ( $\cong 10^{-6}$ ), rispetto al valore dell'indice di rifrazione del liquido puro, e se ne misura sperimentalmente il valore. Inoltre, dalle misure della durata  $t_p$  dell'effetto, in intervalli di tempo successivi all'istante di riempimento della vaschetta con la sostanza sottoposta agli ultrasuoni, si risale ai valori della velocità di caduta, supposta costante, delle particelle in sospensione. Infine si dà notizia di un effetto strettamente collegato con quello studiato in questa e nelle precedenti note: come, quando cessano gli ultrasuoni, nelle dovute condizioni sperimentali, rimangono visibili le righe di ordine pari, così, durante l'azione degli ultrasuoni, si osserva, per le righe diffratte di ordine più basso, un aumento d'intensità di quelle di ordine pari, e, per quelle di ordine più elevato, la formazione e la presenza delle sole righe di ordine pari.



## Capture of $\mu$ -mesons by Atomic Nuclei.

T. EGUCHI and M. OHTA

*Department of Physics, Faculty of Science, Kyushu University - Fukuoka (Japan)*

(ricevuto il 31 Luglio 1953)

**Summary.** — The Fermi gas model of nucleus is used for the calculation of the capture probabilities of negative  $\mu$ -mesons by nuclei, taking into account the neutron-excess and the motion of the  $\mu$ -mesons in the nuclei. In heavy elements the probabilities as functions of the atomic number  $Z$  turn out to be about 60% of the values obtained from Wheeler's  $Z_{\text{eff}}^4$ -law. The most probable excitation energies due to the reaction are found less in heavy elements than in lighter ones in contradiction to the experimental results obtained recently.

### 1. — Introduction.

The probabilities for the capture of negative  $\mu$ -mesons by atomic nuclei have been calculated by WHEELER <sup>(1)</sup> and TIOMNO and WHEELER <sup>(2)</sup>, and their result, the so-called  $Z_{\text{eff}}^4$ -law, is in good agreement with experiment in light nuclei with  $Z \lesssim 30$ . In heavier nuclei, however, the recent experiments by KEUFFEL *et al.* <sup>(3-4)</sup> seem to indicate a marked deviation of the probabilities from the  $Z_{\text{eff}}^4$ -law, i.e. smaller by a factor 2 to 3. Several theoretical attempts <sup>(5-6-7)</sup> have been done to explain the discrepancy, but the general  $Z$ -dependence of the probabilities has not been made clear.

<sup>(1)</sup> J. A. WHEELER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 133 (1949).

<sup>(2)</sup> J. TIOMNO and J. A. WHEELER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 153 (1949).

<sup>(3)</sup> J. W. KEUFFEL, F. B. HARRISON, T. N. K. GODFREY and G. T. REYNOLDS: *Phys. Rev.*, **87**, 942 (1949).

<sup>(4)</sup> A. J. MEYER and J. W. KEUFFEL: *Phys. Rev.*, **90**, 349(A) (1953).

<sup>(5)</sup> J. M. KENNEDY: *Phys. Rev.*, **87**, 953 (1952).

<sup>(6)</sup> J. R. H. DEMPSTER: *Phys. Rev.*, **90**, 349(A) (1953).

<sup>(7)</sup> M. A. PRESTON and M. F. DURET: *Phys. Rev.*, **88**, 1425(L) (1952).

In the present paper an attempt is made to analyse the above problem by the use of Fermi gas model of nucleus, taking into account the neutron excess and the motion of the  $\mu$ -meson in the nucleus. The rate of the absorption is obtained as a function of the atomic number  $Z$  by a straightforward calculation, and the results, although not sufficient to account for the above discrepancy, show more favourable tendency than Wheeler's. The most probable values of the excitation energies turn out smaller in heavy elements than in lighter ones because of the neutron-excess. Similar considerations have been developed independently from our work by HAYAKAWA and ITO<sup>(8)</sup>, and our results are in essential agreement with theirs.

## 2. - Probability of the Absorption.

According to the Fermi gas model of nucleus the maximum momenta of  $Z$  protons and  $N$  neutrons inside a nucleus are given by<sup>(9)</sup>

$$(1) \quad \begin{cases} P = (9\pi/4)^{1/3} (\hbar/R_0)(Z/A)^{1/3}, \\ Q = (9\pi/4)^{1/3} (\hbar/R_0)(N/A)^{1/3}, \end{cases}$$

respectively, where  $R_0 = 1.5 \cdot 10^{-13}$  cm is defined in terms of the nuclear volume  $\Omega$  as

$$\Omega = (4\pi/3)R_0^3 A,$$

with  $A = N + Z$  the mass number. The equilibrium condition assumes the form

$$(2) \quad P^2/2M - V_p = Q^2/2M - V_n,$$

where  $V_p$  and  $V_n$  are the depths of the potential wells for protons and neutrons respectively, their difference  $V = V_n - V_p$  taking into account the Coulomb repulsion among protons implicitly.

Let  $P$ ,  $N$ ,  $\mu$ , and  $\nu$  denote the field amplitudes for proton, neutron,  $\mu$ -meson and neutrino as well as the particles themselves respectively, the elementary process in question is given by

$$P + \mu \rightarrow N + \nu.$$

<sup>(8)</sup> S. HAYAKAWA and K. ITO: *Soryushiron Kenkyu* (Mimeographed Circular in Japanese), **5**, 672 (1953).

<sup>(9)</sup> H. A. BETHE and R. F. BACHER: *Rev. Mod. Phys.*, **8**, 82 (1936) (see p. 153).

The Hamiltonian for the interaction is assumed to have the form:

$$\begin{aligned} \text{scalar coupling:} & \quad g(NP)(\bar{\nu}\mu), \\ \text{or vector coupling:} & \quad g(N\gamma_\lambda P)(\bar{\nu}\gamma_\lambda\mu). \end{aligned}$$

In the non-relativistic limit of the nucleons these quantities are reduced to  $g(N^*P) \cdot (\nu^*\mu)$ .

Assuming that the  $\mu$ -meson has a momentum of magnitude  $l$  on the average and the binding energy  $B$  in the lowest atomic orbit, the elementary process takes place between the initial and the final states given below:

$$\begin{aligned} \text{initial state:} & \quad \text{a proton with momentum } \mathbf{p} \text{ and energy } p^2/2M - V_p, \\ & \quad \text{a } \mu\text{-meson with momentum } \mathbf{l} \text{ and energy } \mu c^2 - B, \\ \text{final state:} & \quad \text{a neutron with momentum } \mathbf{q} \text{ and energy } q^2/2M - V_n, \\ & \quad \text{a neutrino with momentum } \mathbf{k} \text{ and energy } ck. \end{aligned}$$

The conservation of momentum and energy states

$$(3) \quad \mathbf{l} + \mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{k},$$

and

$$(4) \quad p^2/2M - V_p + \mu c^2 - B = q^2/2M - V_n + ck,$$

where  $M$  and  $\mu$  are the masses of nucleon and  $\mu$ -meson respectively. In Eq. (4) we have assumed that the nucleus potentials  $V_p$  and  $V_n$  are not affected much when one proton is changed into a neutron.

The square of the matrix element for the transition is given by  $g^2 D / \Omega$ , where  $D$  is the average density of the  $\mu$ -meson inside the nucleus. Using the density of the final states  $\Omega M k dk / 2\pi^2 \hbar^3 (\mathbf{l} + \mathbf{p})$ , in which the neutrino has a momentum of the magnitude between  $k$  and  $k + dk$ , we obtain the probability for a proton with momentum  $\mathbf{p}$  to absorb a  $\mu$ -meson with momentum  $\mathbf{l}$  and change itself into a neutron with an emission of a neutrino as

$$(5) \quad \lambda = \frac{g^2 M D}{2\pi \hbar^4} \frac{k_M^2 - k_m^2}{s}, \quad \text{with} \quad \mathbf{s} = \mathbf{l} + \mathbf{p},$$

where  $k_M$  and  $k_m$  are the maximum and minimum possible momenta of the neutrino in this reaction.  $k_m$  is obtained from the conservation of energy and momentum (3) and (4) as

$$\begin{aligned} (6) \quad k_m &= \sqrt{(Mc + s)^2 + 2ME'_0} - (Mc + s) \simeq \\ &\simeq \frac{E'_0}{c} - \frac{1}{2} \frac{E_0'^3}{Mc^3} - \frac{E'_0}{Mc^2} s + \frac{E'_0}{M^2 c^3} s^2, \end{aligned}$$

where

$$E'_0 = E_0 + \frac{1}{2M} (p^2 - s^2)$$

and

$$(7) \quad E_0 = \mu c^2 - B + V.$$

On the other hand  $k_M$  is obtained from the Pauli principle, that the neutron produced should have a momentum whose magnitude exceeds that of the neutron on the Fermi surface of the original nucleus, namely  $q > Q$ :

$$(8) \quad k_M = \frac{1}{c} \left( E_0 - V - \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2M} \right).$$

Inserting  $k_m$  and  $k_M$  thus obtained into Eq. (5), we get the probability  $\lambda$  as a function of  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{l}$ . We take the average of  $\lambda$  over the angle between  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{l}$ , and the result is

$$(9) \quad \bar{\lambda} = \frac{g^2 D E_0}{2\pi c^2 \hbar^4} \left[ \left( 1 - \frac{2E_0}{Mc^2} + \frac{2l^2}{M^2 c^2} \right) p + 2 \left( \frac{E_0}{Mc^2} - \frac{l^2}{2M^2 c^2} \right) Mc - \right. \\ \left. - \left\{ \left( \frac{Q^2}{M^2 c^2} - \frac{E_0^2}{M^2 c^4} \right) - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3E_0}{Mc^2} \right) \frac{l^2}{M^2 c^2} - \frac{l^4}{4M^4 c^4} \right\} \frac{M^2 c^2}{p} \right].$$

It can easily be shown that  $\bar{\lambda}$  is positive only for the values of  $p$  which satisfy  $p > p_0$ , where

$$(10) \quad \frac{p_0}{Mc} =$$

$$= \frac{\left( \frac{E_0}{Mc^2} - \frac{l^2}{2M^2 c^2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2E_0}{Mc^2} + \frac{2l^2}{M^2 c^2} \right) \left\{ \left( \frac{Q^2}{M^2 c^2} - \frac{E_0^2}{M^2 c^4} \right) - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3E_0}{Mc^2} \right) \frac{l^2}{M^2 c^2} - \frac{l^4}{4M^4 c^4} \right\}}{1 - \frac{2E_0}{Mc^2} + \frac{2l^2}{M^2 c^2}} - \frac{\left( \frac{E_0}{Mc^2} - \frac{l^2}{2M^2 c^2} \right)}{1 - \frac{2E_0}{Mc^2} + \frac{2l^2}{M^2 c^2}}.$$

protons with momenta below  $p_0$  being inert to the reaction.



In order to sum  $\bar{\lambda}$  over the whole number of the active protons, we multiply it with

$$dZ = \frac{4}{3\pi} (R_0/\hbar)^3 A p^2 dp,$$

and integrate it with respect to  $p$  from  $p_0$  up to  $P$ . The final expression for the total probability per unit time that the orbital  $\mu$ -meson is absorbed in the nucleus is given by

$$(11) \quad A = \frac{1}{18\pi^2} \frac{g^2 D E_0}{\hbar^4 c^2} \left(\frac{R_0}{\hbar}\right)^3 A \left[ 3 \left( 1 - \frac{2E_0}{Mc^2} + \frac{2l^2}{M^2 c^2} \right) (P^4 - p_0^4) + \right. \\ \left. + 8 \left( \frac{E_0}{Mc^2} - \frac{l^2}{2M^2 c^2} \right) (P^3 - p_0^3) Mc - \right. \\ \left. - 6 \left\{ \left( \frac{Q^2}{M^2 c^2} - \frac{E_0^2}{M^2 c^4} \right) - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3E_0}{Mc^2} \right) \frac{l^2}{M^2 c^2} - \frac{l^4}{4M^4 c^4} \right\} \cdot (P^2 - p_0^2) M^2 c^2 \right].$$

### 3. - Relation to Wheeler's Theory.

Expressions (11) should be averaged over the possible distribution of the momentum  $l$  in the  $\mu$ -mesic atom. A rough estimate, however, can be obtained by assuming that the kinetic energy of the  $\mu$ -meson is of the order of magnitude of its binding energy  $B$ , i.e.  $l^2 = 2\mu B$ , the values of the latter have been given in the table of WHEELER's paper <sup>(1)</sup>. In Table I the numerical values of  $l$  thus obtained for various elements are given. From this we see that  $l$  does not contribute much to the total probability (11). In light elements in which  $Z = N = \frac{1}{2}A$  the binding energy  $B$  is very small and can be neglected. In these cases  $l \doteq 0$ , and  $E_0 = \mu c^2$ , and therefore  $P (= Q)$  and  $p_0$  are independent of  $Z$ . Thus the total probability (11) is given by

$$(12) \quad A_w = \frac{1}{9\pi^2} \frac{g^2 D \mu}{\hbar^4} \left(\frac{R_0}{\hbar}\right)^3 Z \left[ 3 \left( 1 - \frac{2\mu}{M} \right) (P^4 - p_0^4) + \right. \\ \left. + 8 (P^3 - p_0^3) \mu c - 6 \left( \frac{P^2}{M^2 c^2} - \frac{\mu^2}{M^2} \right) (P^2 - p_0^2) M^2 c^2 \right] = \\ = \frac{1}{18\pi^2} \frac{g^2 D \mu}{\hbar^4} \left(\frac{R_0}{\hbar}\right)^3 Z \cdot 0.0117 M^4 c^4,$$

because of

$$P = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0} = 0.213 \text{ Mc}$$

$$p_0 = \frac{\frac{P^2}{M^2 c^2} - \frac{\mu^2}{M^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{M^2} + \left(1 - \frac{2\mu}{M}\right)\left(\frac{P^2}{M^2 c^2} - \frac{\mu^2}{M^2}\right) + \frac{\mu}{M}}} \cdot \text{Mc} = 0.101 \text{ Mc}.$$

Eq. (12) shows that  $A_w$  is proportional to  $DZ$  in accordance with the result of WHEELER. Consequently we can put

$$(13) \quad A_w = \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{Z_{\text{eff}}}{Z_0} \right)^4,$$

where  $\tau_0 = 2.22 \cdot 10^{-6}$  s <sup>(10)</sup> is the mean life of the natural decay of  $\mu$ -mesons, and  $z_0$  is the atomic number of the idealized nucleus in which the meson absorption competes on equal terms with the natural decay, and is proportional to  $g^{-1/2}$ .

TABLE I.

Nucleus	$Z_{\text{eff}}$	$P/\text{Mc}$	$Q/\text{Mc}$	$p_0/\text{Mc}$	$l/\text{Mc}$	$E_0(\text{Mev})$	$R(Z, A)$	$\varepsilon_0(\text{Mev})$
		$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$			
$^8\text{O}^{16}$	7.56	2.134	2.134	1.013	0.000	107.0	1.000	16.2
$^{16}\text{S}^{32}$	13.70	2.134	2.134	1.013	0.000	107.0	1.000	16.2
$^{22}\text{Fe}^{56}$	19.40	2.076	2.178	1.092	1.968	107.4	0.831	14.6
$^{30}\text{Zn}^{64}$	21.10	2.089	2.178	1.099	2.230	106.7	0.832	14.8
$^{35}\text{Br}^{79}$	23.00	2.099	2.212	1.137	2.522	106.6	0.847	14.6
$^{47}\text{Ag}^{107}$	26.40	2.044	2.217	1.146	3.169	106.3	0.725	13.4
$^{53}\text{I}^{127}$	27.67	2.009	2.246	1.171	3.452	106.8	0.664	12.4
$^{56}\text{Ba}^{138}$	28.25	1.996	2.260	1.185	3.587	106.9	0.640	12.0
$^{74}\text{W}^{184}$	30.66	1.985	2.265	1.214	4.380	104.7	0.570	11.5
$^{82}\text{Pb}^{208}$	31.50	1.972	2.275	1.232	4.692	104.0	0.531	11.0
$^{92}\text{U}^{238}$	32.17	1.959	2.284	1.252	5.057	102.9	0.487	10.5

In heavier nuclei with  $Z > 20$ , the above simplifications are no more valid and  $E_0$ ,  $P$ ,  $Q$  and  $p_0$  depend on  $A$  and  $Z$ . In these cases  $A$  can be expressed

<sup>(10)</sup> W. E. BELL and E. P. HINCKS: *Phys. Rev.*, **88**, 1424 (1952).

in the form

$$(14) \quad A = \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{Z_{\text{eff}}}{Z_0} \right)^4 R(Z, A),$$

where the correction factor  $R(Z, A)$  is given from Eqs. (11) through (14) as

$$(15) \quad R(Z, A) = 85.62 \frac{E_0}{\mu c^2} \frac{A}{Z} \left[ 3 \left( 1 - \frac{2E_0}{Mc^2} - \frac{2l^2}{M^2 c^2} \right) \left( \frac{P^4}{M^4 c^4} - \frac{p_0^4}{M^4 c^4} \right) + \right. \\ \left. + 8 \left( \frac{E_0}{Mc^2} - \frac{l^2}{2M^2 c^2} \right) \left( \frac{P^3}{M^3 c^3} - \frac{p_0^3}{M^3 c^3} \right) - \right. \\ \left. - 6 \left\{ \left( \frac{Q^2}{M^2 c^2} - \frac{E_0^2}{M^2 c^4} \right) - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3E_0}{Mc^2} \right) \frac{l^2}{M^2 c^2} \left( \frac{P^2}{M^2 c^2} - \frac{p_0^2}{M^2 c^2} \right) \right\} \right],$$

with  $P$ ,  $Q$  and  $p_0$  given by Eqs. (1) and (10) as functions of  $Z$  and  $A$ . The numerical evaluation of  $R(Z, A)$  for various nuclei has been carried out and the results are shown in Table I together with the corresponding values of  $P$ ,  $Q$ ,  $p_0$  and  $E_0$ . From the Table we see that  $R$  decreases monotonously from 1 for  $A = 2Z$  nuclei to 0.49 for  ${}_{92}\text{U}^{238}$  as the atomic weight increases. Fig. 1 shows  $A$  as given by Eq. (14) plotted against  $Z$  for two different values of  $Z_0$ , 9.9 and 11.3. The result of the  $Z_{\text{eff}}^4$ -law is also given for comparison. One will see that our corrected curves are more favourable for the representation of the experimental data (<sup>3,4,11</sup>), although they still deviate from the empirical tendency for the lower or the higher values of  $Z$  in each case.

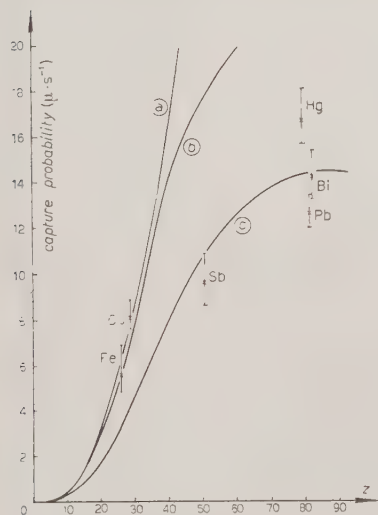


Fig. 1. — Capture probabilities vs.  $Z_0$ . Curve (a) represents Wheeler's law with  $Z_0 = 9.9$ , (b) and (c) our corrected ones with  $Z_0 = 9.9$  and 11.3 resp. Experimental values have been reproduced from ref. (<sup>3</sup>).

#### 4. — Most Probable Excitation.

In the derivation of Eq. (5) we have integrated the square of the transition matrix element first with respect to the variable  $k$  with  $p$  and  $l$  fixed. In order

(<sup>11</sup>) N. F. CROUCH and R. D. SARD: *Phys. Rev.*, **85**, 120 (1952).

to obtain, however, the excitation curve of a nucleus due to the reaction, we should instead sum the probability of the elementary process first over the protons for a given value of  $k$ . Then the probability is obtained as a function of  $k$ , or of the excitation energy  $\varepsilon$ , because of

$$(16) \quad \varepsilon = \mu c^2 - B - ck.$$

This can be carried out analytically, and the excitation curve has in general appearance the triangle shape as has been given by TIOMNO and WHEELER <sup>(2)</sup> in the case of  $A = 2Z$ .

To the approximation in which  $l$  can be neglected, it can be shown that the highest probability is obtained when  $k$  assumes the value

$$(17) \quad k_0 = \frac{1}{c} \left( E_0 - V - \frac{P^2}{2M} + \frac{p_0^2}{2M} \right).$$

The corresponding value of the energy of excitation is from Eqs. (16) and (17)

$$(18) \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2M} (P^2 - p_0^2).$$

The numerical values of  $\varepsilon_0$  as expected from the above expression are listed in Table I for various nuclei. In the Table we see that  $\varepsilon_0$  decreases with increasing atomic number. The low values of  $\varepsilon_0$  do not seem consistent with the experiments by SARD *et al.* <sup>(11,12)</sup> and MORINAGA and FRY <sup>(13)</sup>; in the former they observed about two neutrons on the average emitted on the meson capture by lead nuclei, and in the latter some cases were found in which protons were emitted on the reaction.

## 5. - Other Types of Interaction.

Our calculation so far has been based on the assumption that the Hamiltonian for the interaction among  $P$ ,  $N$ ,  $\mu$  and  $\nu$  is of either scalar or vector type. As is well known there are other possible types of interaction which have different characters under Lorentz's transformation. It turns out, however, that the different choice of the interaction does not change much our result. For example, if we take a pseudo-scalar type of interaction, we get.

<sup>(12)</sup> A. M. CONFORTO and R. D. SARD: *Phys. Rev.*, **86**, 465 (1952).

<sup>(13)</sup> H. MORINAGA and W. F. FRY: *Nuovo Cimento*, **10**, 308 (1953).



instead of Eq. (5),

$$(19) \quad \lambda = \frac{g'^2 D}{8\pi\hbar^4 M c^2} \frac{k_M^4 - k_m^4}{s}$$

with the new coupling constant  $g'$ .

However, if we note that

$$k_M^2 - k_m^2 \doteq \frac{2E_0}{c} (k_M - k_m)$$

and

$$k_M^4 - k_m^4 \doteq \frac{4E_0^2}{c^2} (k_M - k_m),$$

the difference between Eqs. (5) and (19) is approximately by a constant factor, which can be adjusted by an appropriate choice of the interaction constants.

As the result of our calculation we see that the Fermi model of nuclei gives qualitatively an agreeable result, but a more refined model has to be considered in order to explain quantitatively the experiments so far obtained.

The authors wish to express their sincere obligation to Professors S. HAYAKAWA and Y. YAMAGUCHI for their clarifying discussions and advices.

#### RIASSUNTO (\*)

Si usa il modello del gas di Fermi per il calcolo delle probabilità di cattura dei mesoni  $\mu$  negativi da parte dei nuclei. Negli elementi pesanti, le probabilità in funzione del numero atomico  $Z$  risultano circa il 60% dei valori che si ottengono con la legge di Wheeler  $Z_{\text{eff}}^4$ . In contraddizione coi più recenti risultati sperimentali, le più probabili energie d'eccitazione dovute alla reazione risultano negli elementi pesanti minori che in quelli più leggeri.

(\*) Traduzione a cura della Redazione.

## Spettrometro beta e gamma a contatore proporzionale.

G. BERTOLINI, A. BISI e L. ZAPPA

*Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico - Milano*

(ricevuto il 4 Agosto 1953)

**Riassunto.** — Si descrive un contatore proporzionale utilizzato per lo studio di spettri  $\beta$  e  $\gamma$ . Il contatore è collegato ad un purificatore del gas che consente la continua purificazione del gas stesso nel corso delle misure. Il potere risolutivo dello spettrometro viene studiato in funzione dell'energia: si conclude che almeno fino a 50 keV è limitato unicamente dalle fluttuazioni nel numero di coppie di ioni primari generati nel gas dalla particella ionizzante e dalle fluttuazioni nel processo di moltiplicazione. Viene misurato il rendimento di fluorescenza  $\omega_K$  dell'anello K dell'argon. Si trova  $\omega_K = 0,085_0 \pm 0,002_7$ .

### 1. — Introduzione.

La possibilità di utilizzare il contatore proporzionale come spettrometro beta e gamma è stata studiata in questi ultimi anni da vari Autori <sup>(1-4)</sup>. Nel corso di tali ricerche si sono venuti chiarendo i motivi per cui tale metodo può dare risultati paragonabili ed in alcuni casi migliori di quelli ottenuti con i comuni spettrometri magnetici. Si è infatti riconosciuto:

1) che l'energia media spesa da una particella ionizzante per formare una coppia di ioni non dipende dall'energia della particella stessa <sup>(1,4)</sup>;

2) che la moltiplicazione del gas risulta indipendente dall'energia della particella incidente fino ad un valore massimo  $A_{\max}$  legato all'energia della

<sup>(1)</sup> S. C. CURRAN, J. ANGUS e A. L. COCKROFT: *Phil. Mag.*, **40**, 36 (1949).

<sup>(2)</sup> S. C. CURRAN, A. L. COCKROFT e J. ANGUS: *Phil. Mag.*, **40**, 929 (1949).

<sup>(3)</sup> D. H. KIRKWOOD, B. PONTECORVO e G. C. HANNA: *Phys. Rev.*, **74**, 497 (1948).

<sup>(4)</sup> G. C. HANNA, D. H. KIRKWOOD e B. PONTECORVO: *Phys. Rev.*, **75**, 985 (1949).

particella  $E_i$  dalla relazione:

$$(1) \quad A_{\max} \cdot E_i = \text{cost},$$

dove la costante è dell'ordine di  $10^8$  eV.

Quanto sopra vale ovviamente se la particella ionizzante esaurisce il suo percorso nel volume utile del contatore. Ne risulta pertanto per le energie che si possono misurare un limite superiore che dipende dalle dimensioni del contatore e dalla pressione del gas. Tale limite può essere considerevolmente spostato (fino a circa 2 MeV) disponendo il contatore in un campo magnetico sufficiente a mantenere nell'interno del volume utile tutto il percorso degli elettroni (<sup>5-7</sup>).

Quanto al limite inferiore delle energie misurabili si possono rivelare particelle di circa 30 eV, cioè di energia pari a quella necessaria a liberare nel gas una coppia di ioni (1). Come infatti risulta dalla (1), alle basse energie si possono associare alte moltiplicazioni del gas. Ciò significa che anche per basse energie la carica raccolta sul filo è sempre sufficientemente elevata da permettere che il sistema di amplificazione fornisca un impulso di uscita parecchie volte più alto del rumore di fondo.

Giova infine ricordare che nel contatore proporzionale la carica che si raccoglie sul filo viene liberata a breve distanza dal filo stesso (due o tre diametri) e che inoltre il tempo di migrazione degli elettroni attraverso il contatore è parecchie volte inferiore alla più piccola costante di tempo dell'amplificatore. La forma dell'impulso è allora indipendente dall'orientazione della traccia della particella ionizzante. Questa circostanza consente:

1) un'elevata luminosità perchè la sorgente può essere deposta sulle pareti o essere direttamente introdotta nel contatore sotto forma gassosa;

2) un'elevata velocità di registrazione. Se si tiene infatti presente che gli impulsi salgono molto rapidamente nel tempo, si vede che una loro forte differenziazione consente un'elevata velocità di registrazione senza una eccessiva perdita dell'altezza dell'impulso. Ovviamente questo non turba la stretta proporzionalità della risposta del contatore all'energia della particella incidente.

Per concludere, si può dire che il contatore proporzionale costituisce un potente metodo di indagine nel campo della spettrometria  $\beta$  e  $\gamma$  particolarmente valido per lo studio di spettri  $\beta$  molto molli, spettri di raggi X e per lo studio di sorgenti di debole intensità.

(<sup>5</sup>) S. C. CURRAN, A. L. COCKROFT e J. M. INSCH: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 845 (1950).

(<sup>6</sup>) P. ROTHWELL e D. WEST: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 539 (1950).

(<sup>7</sup>) D. WEST e P. ROTHWELL: *Phil. Mag.*, **41**, 873 (1950).

## 2. - Descrizione dello spettrometro.

Il contatore è costituito da un tubo di alluminio lungo 35 cm, del diametro di 7 cm, forzato entro un tubo di ottone. È stata usata la superficie catodica in alluminio per rendere minimo l'assorbimento dei raggi  $\gamma$  da parte della parete. Il filo centrale, di acciaio armonico, del diametro di 0,1 mm porta agli estremi due terminali cilindrici ed è fissato alle basi del contatore mediante due kovar (fig. 1). I terminali cilindrici hanno un diametro di alcuni millimetri, sufficiente a ridurre a zero la moltiplicazione in prossimità della loro superficie senza

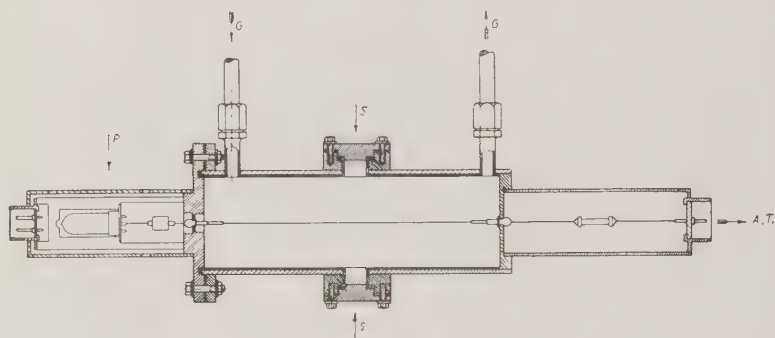


Fig. 1. Schema dello spettrometro.

turbare sensibilmente la simmetria radiale del campo. In questo modo resta esattamente definito il volume utile del conteggio <sup>(8)</sup>.

Sulle pareti del contatore, in corrispondenza del piano mediano, sono fissati due portasorgenti diametralmente opposti che permettono sia di collocare il preparato a livello della parete, sia di collimare entro larghi limiti la radiazione incidente. I portasorgenti sono a tenuta di vuoto ed evitano l'uso di finestre permettendo di lavorare sia in depressione sia a pressione di alcune atmosfere.

Le caratteristiche costruttive del contatore obbligano a portare il filo centrale a tensione positiva rispetto a terra; è pertanto necessario accoppiare il filo alla prima griglia del sistema di amplificazione mediante un condensatore. Il condensatore utilizzato, della capacità di 50 pF e isolato a 5000 V, è stato ricoperto di paraffina per evitare scariche superficiali.

Il sistema di amplificazione consiste di un amplificatore mod. 220 <sup>(9)</sup> avente

<sup>(8)</sup> D. H. WILKINSON: *Ionization Chambers and Counters* (Cambridge, 1950), p. 166.

<sup>(9)</sup> W. C. ELMORE e M. SANDS: *Electronic Experimental Techniques* (New York, 1949), p. 170.

un tempo di salita pari a  $0,5 \mu s$  ed una amplificazione massima di 25000; il preamplificatore è stato montato direttamente sul contatore per diminuire la capacità di ingresso (fig. 1). Quest'ultima è di 15 pF. Il rumore di fondo, misurato alla prima griglia del sistema di amplificazione è di circa  $50 \mu V$ .

Gli impulsi di uscita sono stati inviati ad un analizzatore di impulsi ad un canale <sup>(10)</sup> seguito da una scala di 1000.

### 3. - Condizioni di funzionamento. Circolazione del gas.

Affinchè la moltiplicazione del contatore si mantenga costante nel tempo ed indipendente dalla posizione della traccia della particella ionizzante vanno prese le seguenti cautele:

- 1) il filo deve essere perfettamente cilindrico e deve essere disposto accuratamente secondo l'asse del contatore;
- 2) l'alta tensione deve essere molto ben stabilizzata;
- 3) non devono essere presenti tracce di gas elettronegativi.

Nel nostro caso il diametro del filo, esaminato al microscopio, è costante entro l'1%. La variazione dell'amplificazione dovuta all'eccentricità del filo è trascurabile perchè diminuisce al crescere del raggio del contatore <sup>(11)</sup>.

L'alta tensione ha una stabilità superiore all'1‰ per un periodo di funzionamento di qualche ora.

La presenza di tracce di gas elettronegativi fa sì che l'ampiezza degli impulsi risulti statisticamente dispersa a causa della cattura di un numero variabile di elettroni primari da parte delle molecole di questi gas. Allo

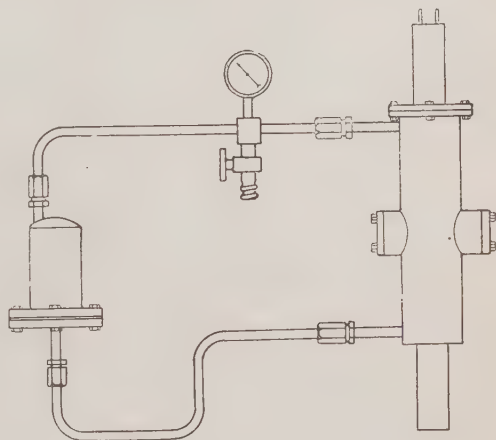


Fig. 2. - Schema dell'impianto per la purificazione del gas.

<sup>(10)</sup> J. E. FRANCIS jr., P. R. BELL e J. C. GUNDLACH: *Rev. Scient. Instr.*, **22**, 133 (1951).

<sup>(11)</sup> B. B. ROSSI e H. H. STAUB: *Ionization Chambers and Counters* (New York, 1949), p. 91.



scopo di eliminare questo grave inconveniente, la miscela di riempimento (90% di argon, 10% di metano) è stata purificata seguendo il procedimento usato per i gas nobili da JENTSCHKE e PRANKLE <sup>(12)</sup>. Il contatore è stato collegato ad un forno di acciaio contenente trucioli di una lega di calcio e magnesio e riscaldato elettricamente ad una temperatura compresa tra i 250 e i 350 °C. Il forno e il contatore, tra loro paralleli, come indicato in fig. 2, giacciono in un piano verticale. Il gas circola continuamente nel corso della misura dall'uno all'altro per convezione termica.

Il metodo di purificazione del gas a cui abbiamo accennato ha già avuto applicazioni in lavori con camere di ionizzazione. Nell'adottare questo metodo va tenuto presente che una variazione della temperatura del forno provoca una variazione dell'affollamento molecolare del gas nella camera o nel contatore. Questo effetto, mentre non turba affatto il funzionamento di una camera di ionizzazione, può provocare nel contatore una sensibile variazione della moltiplicazione. Esaminando accuratamente l'entità di tale fluttuazione, abbiamo constatato che può essere ridotta a valori trascurabili coi seguenti accorgimenti:

1) il volume del contatore deve essere parecchie volte più grande del volume del forno;

2) è necessario attendere, prima di iniziare le misure, che termicamente il forno sia in condizioni stazionarie. Questo stato viene raggiunto dopo un periodo di circolazione del gas di circa due ore; in questo intervallo di tempo è pure ottenuta la completa purificazione del gas;

3) il forno va preferibilmente alimentato con tensione stabilizzata.

Applicando le norme sopra esposte si ottiene facilmente che la moltiplicazione del gas rimanga costante per un periodo di parecchie ore entro il 5  $\frac{\%}{100}$ . La fluttuazione della moltiplicazione del gas dovuta a questo effetto risulta quindi paragonabile a quella dovuta alla variazione della tensione del filo quand'anche quest'ultima sia stabile all'uno su diecimila.

#### 4. - Caratteristiche dello spettrometro. Potere risolutivo.

La moltiplicazione, e il potere risolutivo nella regione di funzionamento proporzionale del contatore sono stati studiati usando la riga  $\gamma$  del RaD a 46,67 keV e la riga X-K del Mn<sup>55</sup> a 5,86 keV. La sorgente di RaD, in equilibrio

(<sup>12</sup>) W. JENTSCHKE e F. PRANKL: *Phys. Zeits.*, **40**, 706 (1939).

con i suoi prodotti di decadimento, era schermata da uno strato di alluminio per assorbire i raggi  $\beta$  del RaE.

In fig. 3 è indicata la dipendenza del fattore di amplificazione dalla tensione applicata al filo per diversi valori della pressione del gas. Nell'intervallo di tensioni e pressioni esplorate si può assumere per il fattore di amplificazione una espressione del tipo:

$$\log A = \text{cost} + aV - bP,$$

dove le costanti  $a$  e  $b$  hanno i valori  $a = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ V}^{-1}$ ;  $b = 2,68 \text{ atm}^{-1}$ . Il valore assoluto di  $A$  è compreso tra 300 e 3500.

Nelle fig. 4 e 5 sono riprodotti alcuni esempi di spettri ottenuti col contatore. La fig. 4 mostra la riga a 46,46 keV che segue la transizione  $\beta^-$  di 18 keV del RaD. In fig. 5 si vede la riga X-K di 5,86 keV emessa dal  $\text{Mn}^{55}$  in seguito alla cattura K del  $\text{Fe}^{55}$ ; sullo spettro sono presenti due righe, il picco debole a 2,66 keV corrisponde all'emissione di un solo fotoelettrone da parte del-

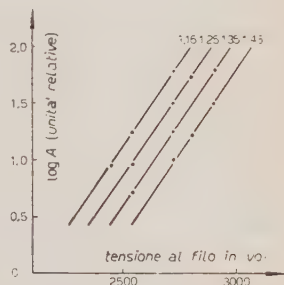


Fig. 3. - Moltiplicazione del gas in funzione della tensione al filo e della pressione del gas.

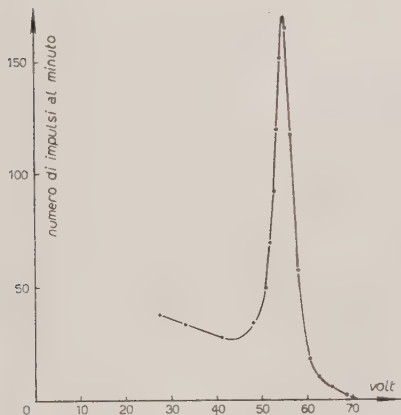


Fig. 4.

Spettro  $\gamma$  del RaD. Riga  $\gamma$  a 46,67 keV.

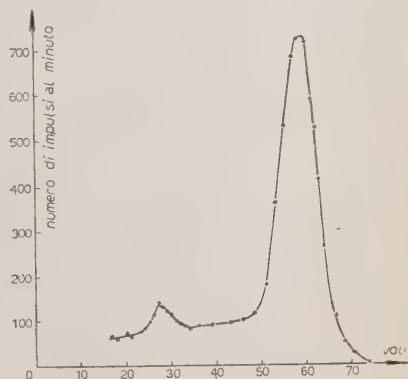


Fig. 5.

Spettro X del  $\text{Mn}^{55}$ .

l'atomo di argon, il picco a 5,86 keV invece all'emissione di un fotoelettrone più un elettrone Auger. Questo effetto verrà discusso nel prossimo paragrafo.

Le larghezze medie delle righe, valutate al semimassimo, sono rispettivamente 6,3% (46,67 keV), 17,8% (5,86 keV), 26,5% (2,66 keV). In generale le cause che determinano la larghezza di una riga monocromatica sono dovute:

1) a fluttuazioni nel numero di coppie di ioni primari liberati nel gas dalla particella ionizzante;

2) a fluttuazioni nel processo di moltiplicazione;

3) ai seguenti effetti strumentali:

a) variazione della moltiplicazione del contatore dovuta a instabilità della tensione al filo e della pressione nel gas (§ 3);

b) derive dell'amplificatore e dell'analizzatore di impulsi;

c) imperfetta collezione degli elettroni dovuta a tracce di gas elettro-negativi (§ 3);

d) inomogeneità del filo (§ 3);

e) fondo dell'amplificatore.

Si può ritenere, almeno in prima approssimazione, che per bassi valori dell'energia la larghezza delle righe sia di natura puramente statistica, per alti valori dell'energia sia di natura puramente strumentale. Nel primo caso, ovviamente, la larghezza delle righe è funzione dell'energia, mentre nel secondo è costante.

Allo scopo di precisare la dipendenza del potere risolutivo dello spettrometro dall'energia e di confrontare i nostri risultati con l'analisi di CURRAN *et al.* <sup>(2)</sup> relativa alle fluttuazioni statistiche di cui si è parlato, abbiamo calcolato dagli spettri ottenuti il rapporto  $\sigma_P/\bar{P}$  della radice dello scarto quadratico medio al valor medio dell'altezza dell'impulso. (Nel nostro caso  $\sigma_P$  è numericamente uguale alla semilarghezza). Tale rapporto, come indicato nella fig. 6, varia linearmente con  $E^{-1/2}$  secondo l'espressione:

$$(2) \quad 2 \frac{\sigma_P}{\bar{P}} = \frac{0,434}{\sqrt{E}},$$

dove  $E$  è espresso in keV. Nello stesso grafico sono riportati i valori ottenuti da CURRAN *et al.*

Si vede dal grafico che il potere risolutivo del nostro spettrometro, almeno fino a 50 keV, pare limitato unicamente dai processi di natura statistica cui si

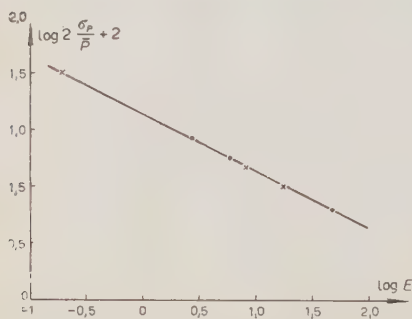


Fig. 6. - Potere risolutivo dello spettrometro.

• nostre misure; x CURRAN *et al.*

è accennato. Questo vale, a parità di ogni altra condizione, soltanto nel caso di continua purificazione del gas. Il procedimento seguito per la purificazione pare pertanto rappresentare un ulteriore progresso nello sviluppo dello spettrometro a contatore proporzionale.

### 5. - Rendimento di fluorescenza dell'anello $K$ dell'argon.

È noto che un atomo ionizzato in uno degli anelli interni si riorganizza o con emissione di radiazione  $X$  o con emissione di elettroni Auger. Si definisce come rendimento di fluorescenza  $\omega_K, \omega_L, \dots$  corrispondente alla ionizzazione di un anello determinato  $K, L, \dots$  la frazione di atomi ionizzati in quell'anello che si riorganizza con emissione di radiazione.

Il rendimento di fluorescenza  $\omega_K$  in argon è stato misurato utilizzando il contatore proporzionale descritto nei precedenti paragrafi. L'argon veniva irraggiato coi quanti  $X$  (5,86 keV) di una sorgente di  $\text{Fe}^{55}$ . Lo strato emittente deposto su uno dei due portasorgenti era praticamente puntiforme e portato a livello della parete del contatore.

Quando un quanto  $X$  è assorbito nell'anello  $K$  dell'atomo di argon e l'atomo si riorganizza per mezzo di una transizione Auger, tutta l'energia della radiazione incidente si dissipa nel contatore. Quando l'atomo si riorganizza con emissione di radiazione  $X$  (serie  $K$ ) una parte della radiazione può sfuggire; l'energia dissipata nel contatore è in tal caso:  $E = 5,86 - E_K$ , dove  $E_K$  indica l'energia di ionizzazione del livello  $K$ , pari per l'atomo di argon a 3,2 keV.

Detti allora  $I_1$  e  $I_2$  i valori misurati per le intensità delle righe a 3,66 e 5,86 keV, si ricava facilmente la relazione seguente:

$$(3) \quad \frac{I_1}{I_1 + I_2} = \omega'_K \left( 1 - \frac{\int_V \pi A dV}{\int_V \pi dV} \right).$$

Nella (3)  $V$  indica il volume utile del contatore,  $\pi dV$  la probabilità che un quanto  $X$  primario venga assorbito nel generico elemento di volume  $dV$  e  $A$  la probabilità che un quanto  $K\text{-}X$  dell'argon generato in questo elemento di volume venga assorbito nel contatore.  $\omega'_K$  è legato al rendimento di fluorescenza  $\omega_K$  dalla (5) come si dirà in seguito. Il termine:

$$(4) \quad \frac{\int_V \pi A dV}{\int_V \pi dV}$$

tiene conto del riassorbimento della radiazione  $K\text{-}X$  dell'argon nel gas; diminuisce al diminuire della pressione  $P$  del gas e tende a zero con la prima po-

tenza di  $P$ . Allo scopo di evitare le lunghe integrazioni numeriche necessarie per il calcolo della (4) il rapporto  $I_1/(I_1+I_2)$  è stato misurato per diversi valori della pressione. Il risultato delle misure è illustrato nella fig. 7; entro gli errori di misura la relazione  $I_1/(I_1+I_2)$  e  $P$  è lineare in tutto l'intervallo di pressioni studiato. Si può allora assumere per  $\omega'_K$  il valore di  $I_1/(I_1+I_2)$  estrapolato a  $P=0$ . Si ottiene così:

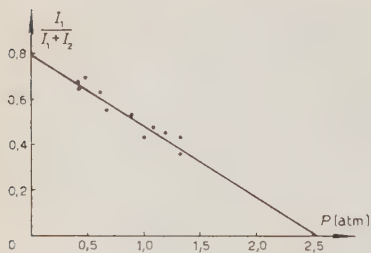


Fig. 7. - Riassorbimento nel contatore della radiazione  $K$ - $X$  dell'argon.

$$\omega'_K = 0,079_5 \pm 0,002_5,$$

dove l'errore assegnato è desunto dallo scarto dei singoli punti dalla retta media.

Per poter risalire da  $\omega'_K$  al rendimento di fluorescenza  $\omega_K$  bisogna osservare che i quanti  $X$  primari vengono assorbiti non solo nell'anello  $K$  ma an-

che negli altri anelli dell'atomo di argon. Per conseguenza all'intensità  $I_2$  della riga a 5,86 keV contribuiscono non solo quegli atomi di argon ionizzati nel livello  $K$  che si riorganizzano per transizione Auger ma anche quelli ionizzati negli anelli più esterni. Le percentuali di atomi ionizzati negli anelli esterni si calcolano immediatamente una volta noti i coefficienti d'assorbimento fotoelettrico  $\tau_K$ ,  $\tau_L$ ,  $\tau_M$  <sup>(13)</sup> relativi ai diversi anelli. Si ha allora:

$$(5) \quad \omega_K = \left(1 + \frac{\tau_L}{\tau_K}\right) \frac{\omega'_K}{1 + \frac{\tau_L}{\tau_K} \omega'_K},$$

avendo trascurato il contributo dell'anello  $M$ . Per l'argon risulta  $\tau_L/\tau_K=0,071$ , da cui:

$$\omega_K = 0,085_0 \pm 0,002_7.$$

Il confronto del valore ottenuto per  $\omega_K$  coi valori attualmente noti è indicato nella tabella seguente:

(13) H. A. BETHE: *Hanbd. d. Phys.*, **24**/1, 479 (1933).



TABELLA I.

0.07	misura con camera a nebbia . . . . .	AUGER <sup>(14)</sup>
0.128	» » » » . . . . .	LOCHER <sup>(15)</sup>
0.076	» » » » . . . . .	MARTIN <i>et al.</i> <sup>(16)</sup>
0.085	. . . . .	Nostre misure
0,081	Valore teorico (teoria non relativistica). . .	BURHOP <sup>(17)</sup>

Ci è gradito ringraziare il prof. G. BOLLA per il continuo interesse e gli utili consigli, il prof. B. FERRETTI per le proficue discussioni, il dott. E. ZIMMER per l'aiuto nella preparazione delle sorgenti.

<sup>(14)</sup> P. AUGER: *Journ. Phys. Radium*, **6**, 205 (1925).

<sup>(15)</sup> G. L. LOCHER: *Phys. Rev.*, **40**, 484 (1932).

<sup>(16)</sup> L. H. MARTIN, BOWER e T. H. LABY: *Proc. Roy. Soc., A* **148**, 40 (1935).

<sup>(17)</sup> E. H. S. BURHOP: *The Auger Effect and Other Radiationless Transitions* (Cambridge, 1952), p. 11.

## SUMMARY

The description is given of a proportional counter, used for the analysis of  $\beta$  and  $\gamma$ -spectra. The counter is permanently attached to a purifier which allows the continuous purification of the gas during the measurements. The variation of the resolving power of the spectrometer with the energy is studied. It is concluded that, at least up to 50 keV, this resolving power is limited only by the fluctuations in the number of ion pairs released in the gas by the ionizing particle, and by the fluctuations introduced by the statistics of the multiplication process. In an application of the technique, the fluorescence yield of the K shell of argon is measured. The value obtained is:  $\omega_K = 0.085_0 \pm 0.002_7$ .

## Chree Analysis of Pressure-Temperature-Corrected Cosmic-Ray Burst Frequencies. (\*)

J. W. BROXON

*Department of Physics, University of Colorado - Boulder, Colo. (U.S.A.)*

(ricevuto l'11 Agosto 1953)

**Summary.** — By Chree's method of superposed epochs, recurrence phenomena <sup>(1)</sup> and relations to other variables <sup>(1)</sup> had been found in the frequency of occurrence of small cosmic-ray bursts in a heavily shielded chamber at 1646 meters altitude and 49° N geomagnetic latitude. The recurrences at intervals of about 27 days have been found to persist after correction of the burst data for variations in barometric pressure and atmospheric temperature by application of the very large coefficients,  $-4.58 \pm 0.22$  percent/mm Hg and  $-2.53 \pm 0.10$  percent/°C, determined recently <sup>(2)</sup>. A defense of the Chree method of analysis is included.

Some time ago <sup>(1)</sup> the frequency of occurrence of certain small cosmic-ray bursts was investigated by Chree's method of superposed epochs. The bursts consisted of 2.9 to 3.6 millions of pairs of ions produced by an estimated 75 to 95 particles or less in a heavily shielded, high-pressure chamber <sup>(2)</sup> at Boulder, altitude 1646 m, geomagnetic latitude 49° N, recorded for 18 months during 1938-1939. The statistical treatment displayed irregular secondary pulses both preceding and subsequent to both positive and negative primary pulses. Both subsequent and preceding difference curves and the combination difference curve displayed secondary pulses with peaks at about 27 days preceding

(\*) Presented at the meeting of the Colorado-Wyoming Academy of Science at Colorado Springs on May 2, 1953.

<sup>(1)</sup> J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **70**, 494 (1946).

<sup>(2)</sup> J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **81**, 555 (1951); appendix I contains a detailed description of the apparatus.

and subsequent to the primary pulses. The secondary pulses in burst frequency amounted to about 3 or 4 percent of the average frequency of approximately 37 small bursts per day, and about 10 percent of the larger variations constituting the primary pulses. These pulses may be compared with the secondary pulses in the burst-corrected cosmic-ray intensity which were found <sup>(3)</sup> at about 28-day intervals before and after the primary pulses, the secondary pulses in this instance amounting to rather less than 0.2 percent of the mean intensity, and about 30 percent of the primary pulses. The burst-corrected cosmic-ray intensity had been corrected also for variations in barometric pressure by means of a simple barometric coefficient, but the burst frequencies were not corrected for anything but time when data were available for less than the 24 hours of a day.

Further investigation <sup>(4)</sup> by Chree's method brought out an inverse relation between the frequency of the small bursts and areas of sunspots, as well as other less striking relations. HOGG <sup>(5)</sup> failed to find either the 27-day recurrence tendency or the correlation with heliophysical data with bursts greater than 100 rays at Canberra, Australia, at an altitude of 800 meters. He pointed out, however, that this is not necessarily in contradiction to the foregoing observations in view particularly of the greater size of his bursts.

Recently <sup>(6)</sup> barometric and (surface) atmospheric temperature coefficients were determined for the same small bursts by the method of least squares. Employing numbers of bursts per day and daily average values of barometric pressure and atmospheric temperature, a barometric coefficient,  $-4.58 \pm 0.22$  percent/mm Hg, and a temperature coefficient,  $-2.53 \pm 0.10$  percent/°C were computed <sup>(7)</sup>. The correlations of the burst frequency with atmospheric

---

<sup>(3)</sup> J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **59**, 773 (1941); a rather full description of Chree's method is included in this paper.

<sup>(4)</sup> J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **72**, 1187 (1947).

<sup>(5)</sup> A. R. HOGG: Memoir No. 10 (No. 5 of Vol. II) *Memoirs of the Commonwealth Observatory*.

<sup>(6)</sup> J. W. BROXON: *Nuovo Cimento*, **9**, 1054 (1952).

<sup>(7)</sup> These large coefficients for the small bursts were based on 18 months of observation. For the burst-corrected cosmic-ray ionization at Boulder, we <sup>(2)</sup> obtained  $-0.174$  percent/mm Hg for the barometric coefficient and  $-0.056$  percent/°C for the atmospheric temperature coefficient, based on 19 months of observation. SIMPSON, FONGER and TREIMAN: *Phys. Rev.*, **90**, 934 (1953), very recently obtained the value  $-0.96$  percent/mm Hg for the barometric pressure coefficient for locally produced neutrons, based on about 3 months of observation at Climax, Colo. Since they anticipated a possible small negative atmospheric temperature coefficient and measured a small positive temperature coefficient based on 2 months of observation at Chicago, Ill., they concluded that the temperature coefficient for the neutron production was negligible.

temperature and pressure were found to be excellent, the significance ratios being comparable to those found <sup>(2)</sup> for the corresponding coefficients for the burst-corrected cosmic-ray ionization. The barometric coefficient for the small bursts is about 26 times as great as that for the burst-corrected ionization, and the temperature coefficient for the small bursts is about 45 times as great as that for the burst-corrected intensity.

While the very great reliability of the burst data for the 1938-9 series in comparison with those of the 1947-8-9 series in spite of their much smaller number should be clear to anyone who reads the paper of reference <sup>(6)</sup> *in toto*, it probably is well to emphasize the difference here in order to preclude possible confusion by the casual reader. The increased sensitivity employed for the later series produced records far different in appearance from those obtained in the earlier series. With only one or two 1-mm bursts recorded per hour in the 1938-9 series, it was relatively simple to identify and measure them. With often more 1-mm bursts in a single hour of the 1947-8-9 series than in a whole day of the earlier series, and with the very great increase in the frequency of bursts near the lower limit of the range selected, it was a vastly more difficult undertaking to make reliable readings for the later series, and it is perhaps not too surprising that there was great disagreement among readers. The relatively inaccurate burst data of the 1947-8-9 series were included in the papers of references <sup>(2)</sup> and <sup>(6)</sup> because even these provided considerable evidence of very large atmospheric temperature and pressure coefficients for these small bursts. The two readers of the 1938-9 series were able to repeat their readings and check each other quite satisfactorily. The high correlations displayed in reference <sup>(6)</sup> provide excellent evidence for the reliability of the burst data for the 1938-9 series. It seems too improbable that significance ratios of —13.75 and —14.66 could result if either the data were unreliable or the barometric and temperature effects were not real. Insofar as the author is aware, these are the only published small-burst data read with sufficient accuracy for a sufficient length of time to establish comparably reliable temperature and pressure coefficients.

In view of the marked dependence of the frequency of occurrence of the small bursts upon the pressure and temperature of the atmosphere (though the temperature of the apparatus was not permitted to vary 1 °C from the average during the 18 months of observation) it was decided to employ the Chree method again after correction of the data for variations in the atmospheric temperature and pressure. With such large coefficients, it seemed possible that application of pressure and temperature corrections might entirely wipe out the secondary pulses at 27 days, or that it might provide more regular secondary pulses. Accordingly, the pressure and temperature coefficients cited above were employed to reduce the burst-frequency data to the mean pressure, 628.7 mm Hg, and the mean atmospheric temperature, 11.50 °C.

As expected, the combined corrections on account of pressure and temperature were often large. Corrections of the order of 50 percent were not uncommon, and the corrections for a few days amounted to more than 100 percent of the daily values. Of the 90 zero days selected for the primary positive pulse, 39 were altered by the corrections for pressure and temperature; and 42 of the 90 days selected for the primary negative pulse were altered likewise.

After reduction of the data to the mean pressure and temperature, the Chree analysis was carried out with the corrected data precisely as before <sup>(1)</sup> with the uncorrected data. Positive, negative, and difference pulse curves were constructed with zero days selected from the first 15 months for day numbers —10 to 45, and the corresponding curves were constructed with zero days selected from the last 15 months for day numbers —45 to 10. These curves (not shown here) all displayed secondary pulses rather more ragged than the corresponding ones obtained before correction for variations in atmospheric temperature and pressure, but of comparable magnitude and still centered in the neighborhood of 27 days preceding or following the primary pulses.

Because the situation is rather well summarized by the combination difference curve, it is given here in fig. 1, together with the corresponding curve obtained before correction. The full-line curve is the new one obtained after correction for variations in atmospheric temperature and pressure, while the broken-line curve is identical with the curve in fig. 3 of reference <sup>(1)</sup>. While the secondary pulse obtained with the corrected data is somewhat less regular than that obtained without correction, it clearly persists, is of comparable magnitude, and appears also to be centered about day number 27. The persistence of the secondary pulse in spite of the very large corrections on account

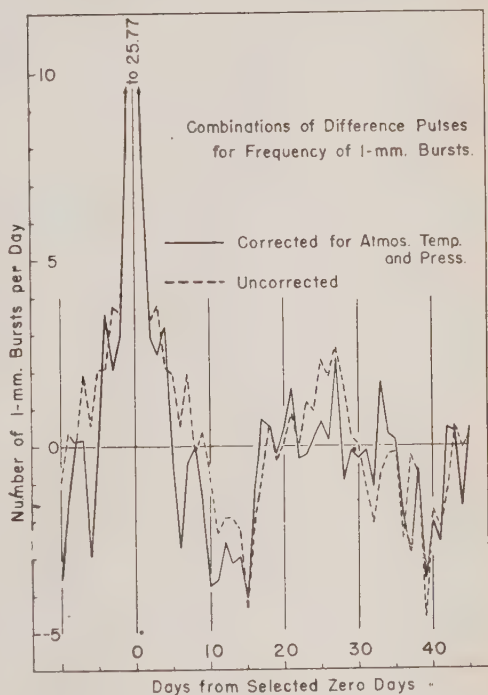


Fig. 1.



of pressure and temperature is rather striking. It indicates that the tendency toward recurrences of high or low values of the frequency of occurrence of the small bursts at intervals of about 27 days can not be attributed to variations in the barometric pressure or in the temperature as measured at Earth's surface.

Because the usefulness of the Chree method of treatment of data has been questioned, some remarks in its defense appear to be in order. It has been claimed that the method is somewhat *fraudulent* in that it *creates* in random data secondary maxima and minima with a period about equal to the time division within which the primary maxima and minima are sought, about 30 days in the present instance; and that the first minimum following the primary positive pulse as between day numbers 10 and 15 in fig. 1 is artificial, i.e., is introduced by the method of analysis. In the same vein, it has been stated that prediction of what to expect in the absence of a real effect is practically impossible. From this point of view it might appear that even if the burst frequencies of the present paper were so unreliable as to be wholly unrelated to any physical events, thus constituting a random aggregation of numbers, application of the Chree analysis might create the secondary pulses found, and since after application of the corrections the data might still be random, the secondary pulses would again be found.

It appears to the author that the claim of *fraudulence* might more aptly be applied to all methods of harmonic analysis which are based upon the *a priori* choice of some particular fundamental period such as the mean solar or sidereal day or the synodic or sidereal month, with all harmonics having frequencies which are necessarily integral multiples of the pre-selected fundamental frequency, unless provision is made for the inclusion of every fundamental frequency. The Chree method appears, at least, to have an advantage in not requiring the prior assumption of some period as fundamental.

While prediction of what to expect upon application of the Chree method to random data may be difficult, experience, as usual, provides some useful indications. A single example of the failure of the application of the method to produce the secondary maxima and minima of the type mentioned above should be sufficient to prove that the method does not necessarily *create* such maxima and minima.

In considering the value of the Chree method of superposed epochs, it may be noted that it was devised by Chree<sup>(8)</sup> to investigate systematically recurrences of disturbances in the terrestrial magnetic field and of sunspots, and a possible relation between these. He did establish rather strikingly a relation between these variables, and recurrences at intervals of about 27 days or a little more. His conclusions appear to have been quite generally accepted.

---

<sup>(8)</sup> C. CHREE: *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A **212**, 75 (1913); A **213**, 245 (1914).

On page 100 of his first paper is displayed a sharp primary maximum in the magnetic character and a secondary maximum with its crest considered by Chree to lie between day numbers 27 and 28. Between the primary and secondary pulses in this instance is no distinct minimum but, as Chree states, « a practically dead-level value ». This disproves the contention that the decided minimum following the primary maximum as displayed in fig. 1 of the present paper must be a consequence of the Chree method.

Another circumstance of some interest, if the secondary and other subsidiary maxima and minima are to be regarded as creations of the method of analysis, consists of the decided differences among these subsidiaries when the method is applied to different variables. In his second paper, CHREE <sup>(8)</sup> extended the treatment of magnetic data far enough to obtain sets of three subsidiary pulses with amplitudes which decreased markedly with distance from the primary pulse. The amplitudes of the subsidiaries were roughly 30, 20 and 10 percent of the primary, in that order. This property was displayed by all 4 sets of pulses, positive and negative, preceding and subsequent. On the other hand, COMPTON <sup>(9)</sup> and his associates who first applied the method to cosmic-ray ionization data, found subsidiary cosmic-ray pulses of the order of 30 percent of the primary which did not notably decrease in amplitude for at least 4 intervals of 27 (or 28) days from the primary, a characteristic confirmed by BROXON <sup>(3)</sup> and by HOGG <sup>(5)</sup>.

A further relation that seems worth mentioning is brought out in another paper by BROXON <sup>(10)</sup>. Fig. 10 of reference <sup>(10)</sup> brings out a persistent 34-day period for the recurrence of fluctuations of sunspot areas of that time, together with a 28-day period for the cosmic-ray recurrences, even though the selected days in both instances were identical days, having been selected on the basis of cosmic-ray intensity. If the subsidiary pulses are created by the treatment of the data, it seems odd that two such distinctly different periods should result for the two sets of data subjected to identical treatment.

What to expect in the absence of a real effect appears to be indicated by the work of HOGG <sup>(5)</sup>. He found that application of Chree's method clearly indicated recurrences of variations in the burst-corrected cosmic-ray ionization at intervals of 27 to 28 days with no decrease in amplitude of subsidiary pulses for 4 intervals, but the same treatment of data for large bursts provided no comparable evidence for the existence of a recurrence tendency in these. His fig. 34 for the large bursts gives quite as much indication of a subsidiary pulse at day 40 as at day 27, and others somewhat comparable at day numbers 11, 18, 23 and 34. Moreover, it displays no evidence of the distinct minimum between day numbers 10 and 15 displayed by fig. 1 of the present paper.

<sup>(8)</sup> A. H. COMPTON and A. T. MONK: *Phys. Rev.*, **59**, 112 (1941).

<sup>(10)</sup> J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **62**, 508 (1942).

Whatever method of analysis is employed, it appears to the author to be of prime importance that data be available and utilized for a time interval long compared to any period that the statistical analysis purports to establish. From this point of view it is particularly risky to attempt to establish a 27 to 28 day recurrence tendency in data for only 96 days by means of autocorrelation, for instance, as was done very recently <sup>(11)</sup>, even though in this instance the effect may very well exist.

It is not claimed now, nor was it claimed in the original paper <sup>(1)</sup>, that the Chree treatment of the data for the small bursts provides incontrovertible evidence of recurrences at 27 days so strong as to be conclusive. It is considered, however, that the evidence provided is definitely positive and therefore worth noting, and the present paper makes it clear that such evidence as is provided can not be ascribed to variations in the temperature or pressure of the atmosphere.

<sup>(11)</sup> W. H. FONGER: *Phys. Rev.*, **91**, 351 (1953).

#### RIASSUNTO (\*)

Col metodo di Chree delle specie sovrapposte si erano trovati fenomeni ricorrenti <sup>(1)</sup> e relazioni con altre variabili <sup>(2)</sup> nella frequenza di produzione di piccoli sciami di raggi cosmici in una camera fortemente schermata a 1646 m di altitudine e 49° N di latitudine geomagnetica. Si è rilevato che le ricorrenze a intervalli di circa 27 giorni persistono dopo correzione dei dati degli sciami per le variazioni della pressione barometrica e della temperatura atmosferica mediante l'applicazione dei coefficienti assai elevati  $-4.58 \pm 0.22\%/mm \text{ Hg}$  e  $-2.53 \pm 0.10\%/^{\circ}\text{C}$  precedentemente determinati <sup>(6)</sup>. Nella chiusa una giustificazione dell'analisi secondo Chree.

(\*) Traduzione a cura della Redazione.

## Sul calcolo delle tracce elettrofotoniche.

R. CESTER e E. CLEMENTEL

*Istituto di Fisica dell'Università di Padova*  
*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova*

(ricevuto il 3 Settembre 1953)

**Riassunto.** — Vengono calcolate le tracce elettrofotoniche partendo da una soluzione delle equazioni di diffusione rappresentata da uno sviluppo in serie del tipo di Bhabha e Chakrabarty. Si mostra come sia possibile stabilire una formularicorrente per i termini della serie, la quale risulta in particolare indeterminata per  $E = 0$ . Imponendo tuttavia alla serie di soddisfare il principio di conservazione dell'energia, si ha per le tracce l'andamento previsto da altri autori.

### 1. — Introduzione.

Dato lo spettro differenziale elettronico  $\pi(E, t) dE$ , è noto che si definisce come traccia elettronica l'integrale:

$$(1) \quad f(E) = \int_0^{\infty} \pi(E, t) dt = \mathcal{L}_{\pi}(0),$$

avendo definito come trasformata di Laplace della funzione  $f(x)$  la quantità

$$(2) \quad \mathcal{L}_f(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp[-\lambda x] f(x) dx.$$

In modo analogo resta definita una traccia fotonica differenziale  $g(W)$ ,

mentre le tracce integrali saranno date da

$$(3) \quad F(E) = \int_E^{\infty} f(E) dE = \mathcal{L}_H(0), \quad G(W) = \int_W^{\infty} g(W) dW = \mathcal{L}_I(0).$$

In calcolo delle tracce mediante le trasformate di Laplace è stato fatto, nel caso delle alte energie, trascurando cioè le perdite per ionizzazione, da NORDHEIM e HEBB <sup>(1)</sup>. Nell'approssimazione successiva si hanno i lavori di TAMM e BELENKY <sup>(2)</sup>, di ROSSI e KLAPMAN <sup>(3)</sup>, e infine di RICHARDS e NORDHEIM <sup>(4)</sup>, che risolvono numericamente, con un metodo di approssimazioni successive, le due equazioni che descrivono il bilancio degli effetti di produzione e materializzazione che caratterizzano uno sciame elettrofotonico. Benchè più laborioso, con quest'ultimo metodo si ha il vantaggio di poter tener conto dell'andamento corretto delle sezioni d'urto dei vari processi, mentre tutti gli altri autori usano le espressioni asintotiche, dando pertanto dei risultati validi solo nel caso di elementi a basso numero atomico <sup>(5)</sup>.

Qui si è risolto il problema del calcolo delle tracce ricorrendo ad un metodo analogo a quello già usato da CORBEN <sup>(6)</sup> e BHABHA e CHAKRABARTY (B.C.) <sup>(7)</sup> nel tentativo di dare una soluzione rigorosa delle equazioni della teoria della cascata elettrofotonica. Si è riusciti così a stabilire una formula ricorrente per i termini della serie di B.C., che ci ha permesso di esaminare la convergenza della serie in funzione dell'energia e riconoscere in particolare che la serie è indeterminata per  $E = 0$ . Considerando infatti  $n + 1$  termini della serie ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), per  $n \rightarrow \infty$  la somma tende a  $+\infty$  per  $n + 1$  dispari ed a  $-\infty$  per  $n + 1$  pari. Solo prendendo un numero finito di termini si hanno dei risultati confrontabili con quelli di Tamm e Belenky e Richards e Nordheim, ed è possibile rispettare il principio di conservazione dell'energia. Useremo per le sezioni d'urto le espressioni asintotiche, e dei due casi, elettrone e fotone iniziale, tratteremo per esteso solo il primo, con particolare riguardo alle tracce degli elettroni.

<sup>(1)</sup> L. W. NORDHEIM e M. H. HEBB: *Phys. Rev.*, **56**, 494 (1939).

<sup>(2)</sup> I. TAMM e S. BELENKY: *Phys. Rev.*, **70**, 660 (1946).

<sup>(3)</sup> B. ROSSI e S. J. KLAPMAN: *Phys. Rev.*, **61**, 414 (1942).

<sup>(4)</sup> J. A. RICHARDS e L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **74**, 1106 (1948).

<sup>(5)</sup> E. CLEMENTEL e L. FABBRICHESI: *Nuovo Cimento*, **5**, 78 (1948).

<sup>(6)</sup> H. C. CORBEN: *Phys. Rev.*, **60**, 435 (1941).

<sup>(7)</sup> H. J. BHABHA e S. K. CHAKRABARTY: *Phys. Rev.*, **74**, 1352 (1948).



## 2. - Calcolo delle trasformate di Laplace.

Scriveremo le soluzioni delle equazioni di diffusione <sup>(8)</sup> nella forma

$$(4a) \quad \pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i E_0} \int_C ds \left( \frac{E_0}{E} \right)^{s+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\beta}{E} \right)^n \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+1)} p_n(s, t),$$

$$(4b) \quad \gamma(E_0, W, t) = \frac{1}{2\pi i E_0} \int_C ds \left( \frac{E_0}{W} \right)^{s+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\beta}{W} \right)^n \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+1)} q_n(s, t),$$

che danno rispettivamente gli spettri differenziali degli elettroni e dei fotoni dovuti a un elettrone primario di energia  $E_0$ . Con  $\beta$  si è indicata la perdita di energia per ionizzazione per unità di percorso. Il cammino di integrazione  $C$  è una linea parallela all'asse immaginario alla destra di tutti i poli.

Introducendo le (4a, b) nelle equazioni di diffusione, si ottengono per le funzioni  $p_n$  e  $q_n$  le equazioni di condizione

$$(5a) \quad \frac{\partial p_n(s, t)}{\partial t} = B(s+n)q_n(s, t) - A(s+n)p_n(s, t) + p_{n-1}(s, t),$$

$$(5b) \quad \frac{\partial q_n(s, t)}{\partial t} = C(s+n)p_n(s, t) - \sigma_0 q_n(s, t).$$

Applicando al sistema (5) la trasformata di Laplace, si hanno le due equazioni nelle trasformate

$$(6a) \quad \lambda \mathcal{L}_{p_n}(s, \lambda) - p_n(s, 0) = B(s+n)\mathcal{L}_{q_n}(s, \lambda) - A(s+n)\mathcal{L}_{p_n}(s, \lambda) + \mathcal{L}_{p_{n-1}}(s, \lambda),$$

$$(6b) \quad \lambda \mathcal{L}_{q_n}(s, \lambda) - q_n(s, 0) = C(s+n)\mathcal{L}_{p_n}(s, \lambda) - \sigma_0 \mathcal{L}_{q_n}(s, \lambda).$$

Per sciami iniziati da elettrone, come si vede subito dalle (4), le condizioni iniziali sono

$$(7) \quad n=0: \quad p_0(s, 0)=1, \quad q_0(s, 0)=0; \quad n \neq 0: \quad p_n(s, 0)=q_n(s, 0)=0.$$

Precisate così le condizioni a  $t=0$ , risolvendo il sistema (6) si ottiene

<sup>(8)</sup> B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941), eq. (2.69) e (2.12).  
Per brevità rimandiamo a questo articolo per il simbolismo usato in questa nota.

facilmente

$$(8a) \quad \mathcal{L}_{p_0}(s, \lambda) = \frac{\lambda + \sigma_0}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]},$$

$$(8b) \quad \mathcal{L}_{p_n}(s, \lambda) = \mathcal{L}_{p_0}(s + n, \lambda) \mathcal{L}_{p_{n-1}}(s, \lambda) \quad (n \neq 0),$$

$$(8c) \quad \mathcal{L}_{q_n}(s, \lambda) = \frac{C(s + n)}{\lambda + \sigma_0} \mathcal{L}_{p_n}(s, \lambda).$$

La (8b) si può scrivere anche nella forma

$$(9) \quad \mathcal{L}_{p_n}(s, \lambda) = \prod_{i=0}^n \mathcal{L}_{p_0}(s + i, \lambda),$$

come si vede subito per induzione sostituendo a secondo membro per le  $\mathcal{L}_{p_{n-i}}(s, \lambda)$  l'espressione data dal primo membro. Ciò significa che accanto alla (8b) vale anche la

$$(10) \quad \mathcal{L}_{p_n}(s, \lambda) = \mathcal{L}_{p_0}(s, \lambda) \mathcal{L}_{p_{n-1}}(s + 1, \lambda),$$

che si può alternativamente scrivere nella forma (9), valida anche per  $n = 0$ . La relazione ricorrente (9) mostra come per il calcolo dei termini successivi delle serie (4) sia sufficiente la conoscenza della  $\mathcal{L}_{p_0}(s, \lambda)$ , che non dà altro che l'approssimazione  $A$ , come si può riconoscere dalle trasformate

$$(11a) \quad \mathcal{L}_\pi(E_0, E, \lambda) = \\ = \frac{1}{2\pi i E_0} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds \left( \frac{E_0}{E} \right)^{s+1} \mathcal{L}_\pi(s, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\beta}{E} \right)^n \frac{\Gamma(s + n + 1)}{\Gamma(s + 1)} \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{p_0}(s + i, \lambda),$$

$$(11b) \quad \mathcal{L}_\gamma(E_0, W, \lambda) = \\ = \frac{1}{2\pi i E_0} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds \left( \frac{E_0}{W} \right)^{s+1} \mathcal{L}_\gamma(s, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\beta}{W} \right)^n \frac{\Gamma(s + n + 1)}{\Gamma(s + 1)} \frac{C(s + n)}{\lambda + \sigma_0} \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{p_0}(s + i, \lambda),$$

ponendo  $n = 0$  e ricordando le (8a) e (8c).

Per quanto riguarda la convergenza delle (11) occorre precisare quanto segue. È stato dimostrato da IYENGAR<sup>(9)</sup> che la (4a) converge uniformemente

<sup>(9)</sup> K. S. K. IYENGAR: *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A 15, 195 (1942).

mente ed assolutamente purchè sia  $E > \beta t$ , potendosi provare che

$$(12) \quad p_\nu(s, t) < (1 + \varepsilon)^n \frac{t^n}{n!},$$

per ogni valore di  $s$  su  $C$ . Se ne conclude che le trasformate (11) divergono per qualunque valore di  $E$ . Poichè d'altra parte il termine  $n = 0$  dà, come si è visto, l'approssimazione  $A$ , noi continueremo a considerarle come soluzioni delle equazioni di approssimazione  $B$ , e faremo vedere come arrestando la serie ad un valore tale che

$$(13) \quad \mathcal{L}_H(E_0, 0, 0) = \frac{E_0}{\beta},$$

che soddisfi cioè al principio di conservazione dell'energia, le (11) diano effettivamente, sia agli effetti delle tracce che delle curve di transizione dei risultati in accordo con quelli ottenuti da altri autori.

Il caso di uno sciame iniziato da un fotone si tratta in maniera strettamente analoga. Indicando con  $p'_n$ ,  $q'_n$  le funzioni relative al fotone iniziale, le condizioni da imporre per  $t = 0$  sono espresse dalle

$$(14) \quad n = 0: \quad p'_0(s, 0) = 0, \quad q'_0(s, 0) = 1; \quad n \neq 0: \quad p'_n(s, 0) = q'_n(s, 0) = 0.$$

Tenendo conto delle (14) il sistema (6) dà allora

$$(15a) \quad \mathcal{L}_{x'_0}(s, \lambda) = \frac{B(s)}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]},$$

$$(15b) \quad \mathcal{L}_{x'_n}(s, \lambda) = \mathcal{L}_{x'_0}(s, \lambda) \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_0}(s + i, \lambda) \quad (n \neq 0),$$

$$(15c) \quad \mathcal{L}_{q'_n}(s, \lambda) = \frac{C(s + n)}{\lambda + \sigma_0} \mathcal{L}_{x'_n}(s, \lambda).$$

La conoscenza delle  $\mathcal{L}_{x_0}(s, \lambda)$  ed  $\mathcal{L}_{x'_0}(s, \lambda)$  consente quindi di risolvere il caso del fotone iniziale. Operando le trasformate di Laplace sulle (4) con  $W_0$  al posto di  $E_0$ , e tenendo conto delle (15), si ottengono delle relazioni analoghe alle (11), che per  $n = 0$  si riducono alle (2.38) di approssimazione  $A$  di Rossi e Greisen.

### 3. - Calcolo delle tracce.

Consideriamo ora in particolare la trasformata (11a). Sostituendo a denominatore  $E^{s+n+1}$  con  $(E + \beta - \beta)^{s+n+1}$ , sviluppando in serie di potenze di  $[\beta/(E + \beta)]$  ed eseguendo il prodotto della doppia sommatoria alla Cauchy, la (11a) diventa

$$(16) \quad \mathcal{L}_\pi(E_0, E, \lambda) = \\ = \frac{1}{2\pi i E_0} \int_c ds \left( \frac{E_0}{E + \beta} \right)^{s+1} \mathcal{L}_{p_0}(s, \lambda) \sum_{n=0}^{n_0} \left( \frac{\beta}{E + \beta} \right)^n \frac{\Gamma(s + n + 1)}{\Gamma(s + 1)} l_n(s, \lambda),$$

dove si è definito

$$(17) \quad l_n(s, \lambda) = \frac{1}{n!} - \frac{\mathcal{L}_{p_0}(s + 1, \lambda)}{(n - 1)!} \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{p_0}(s + i, \lambda).$$

Nelle nostre notazioni, la soluzione data da B.C. si scrive <sup>(10)</sup>

$$(18) \quad \pi(E_0, E, t) = \\ = \frac{1}{2\pi i E_0} \int_c ds \left( \frac{E_0}{E + \beta g} \right)^{s+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\beta}{E + \beta g} \right)^n \frac{\Gamma(s + n + 1)}{\Gamma(s + 1)} f_n(s, t),$$

dove la funzione  $f_n(s, t)$  è definita dalla

$$(19) \quad f_n(s, t) = \psi_0(s, t) \frac{g^n}{n!} - \psi_1(s, t) \frac{g^{n-1}}{(n-1)!} \dots + (-1)^n \psi_n(s, t),$$

con  $g(s, t) = \psi_1(s, t)/\psi_0(s, t)$ . La  $g(s, t)$  è una funzione lentamente variabile di  $s$  e di  $t$ , dell'ordine di 1. La (18) è stata dedotta da B.C. partendo dalla (4a); dalla sua esistenza per  $E \geq 0$ , i due autori concludono, invocando il principio della continuazione analitica, che la (18) è la soluzione esatta valida per qualunque  $E \geq 0$ . Noi riteniamo invece che la (4a) e la (18) siano due elementi di una funzione analitica aventi lo stesso raggio di convergenza ( $E > \beta t$ ).

Poniamo infatti senz'altro  $g = 1$  nelle (18) e (19); faremo ora vedere come la soluzione che ne segue, non differisca praticamente da quella calcolata da B.C. per  $g \neq 1$ . Con  $g = 1$  è possibile effettuare la trasformata della (18), e

<sup>(10)</sup> H. J. BHABHA e S. K. CHAKRABARTY, op. cit., form. (19). Si noti che le funzioni  $f_n(s, t)$ ,  $g(s, t)$  e  $\psi_n(s, t)$  indicate nelle (18) e (19) del testo corrispondono alle stesse funzioni di B. C., con  $s$  spostato di un'unità. La  $\psi_n(s, t)$  non è poi altro che la nostra  $p_n(s, t)$ .

si vede subito che non si ottiene altro che la (16), in quanto le trasformate delle (11) o (13) di B.C. corrispondono, per il teorema del prodotto integrale <sup>(11)</sup>, rispettivamente alle (8b) e (10). L'integrazione su  $s$  della (16) si effettua subito osservando che per  $E + \beta \ll E_0$  e  $\lambda > -\sigma_0$  basta considerare solo il residuo relativo al polo definito dall'equazione  $\lambda_1(s) = \lambda$ , che dà

$$(20) \quad \mathcal{L}_\pi(E_0, E, \lambda) = -\frac{1}{E_0} \left( \frac{E_0}{E + \beta} \right)^{s+1} \frac{H_1(s)}{\lambda_1'(s)} \sum_{n=0}^{n_0} \left( \frac{\beta}{E + \beta} \right)^n \frac{\Gamma(s + n + 1)}{\Gamma(s + 1)} l_n[s, \lambda_1(s)],$$

da cui integrando su  $E$

$$(21) \quad \mathcal{L}_{II}(E_0, E, \lambda) = -\left( \frac{E_0}{E + \beta} \right)^s \frac{H_1(s)}{\lambda_1'(s)} \sum_{n=0}^{n_0} \left( \frac{\beta}{E + \beta} \right)^n \frac{\Gamma(s + n + 1)}{\Gamma(s + 1)} \frac{l_n[s, \lambda_1(s)]}{s + n}.$$

Calcoliamo ora l'antitrasformata della (21) per  $E = 0$ . Ponendo per brevità

$$(22) \quad K(s) = \sum_{n=0}^{n_0} K_n(s), \quad K_n(s) = \frac{\Gamma(s + n + 1)}{\Gamma(s)} \frac{l_n[s, \lambda_1(s)]}{s + n},$$

si ha:

$$(23) \quad II(E_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int ds \left( \frac{E_0}{\beta} \right)^s \frac{H_1(s)}{s} K(s) \exp[-\lambda_1(s)t].$$

Si noti l'analogia formale fra la (23) e la (2.103) di Rossi e Greisen, dove al posto di  $K(s)$  figura la funzione  $K_1(s, -s)$  (il termine in  $K_2(s, -s)$  è trascurabile). In tab. 1 sono date le  $K_n(s)$  fino ad  $n = 6$  per alcuni valori di  $s$ .

TABELLA 1. -  $K_n(s)$ .

$n \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6
0.2	5.000	0.689	0.324	0.200	0.148	0.124	0.118
0.4	2.500	0.534	0.286	0.166	0.121	0.083	0.081
0.6	1.667	0.401	0.269	0.133	0.128	0.056	0.108
0.8	1.250	0.284	0.272	0.084	0.158	-0.025	0.213
1.	1.000	0.182	0.295	0.015	0.242	-0.180	0.547
1.2	0.833	0.095	0.335	-0.077	0.377	-0.474	1.087
1.4	0.714	0.023	0.391	-0.188	0.560	-1.062	1.762
1.6	0.625	-0.041	0.445	-0.339	0.878	-1.601	3.596
1.8	0.555	-0.094	0.521	-0.495	1.281	-2.515	5.962
2.	0.500	-0.138	0.589	-0.673	1.806	-3.355	10.105

<sup>(11)</sup> S. A. GHIZZETTI: *Calcolo Simbolico* (Bologna, 1943), pag. 29.



Integrando la (18), B.C. hanno calcolato la  $\Pi(E_0, 0, t)$  limitando lo sviluppo ai primi tre termini, con un'approssimazione <sup>(12)</sup> del 0,69 per  $\ln(E_0/\beta) = 6$ . Se nelle (20) e (21) si pone  $\lambda = 0$ ,  $s = 1$ , si hanno le espressioni delle tracce

$$(24) \quad f(E_0, E) = \mathcal{L}_\pi(E_0, E, 0), \quad F(E_0, E) = \mathcal{L}_\Pi(E_0, E, 0).$$

TABELLA 2. - Spettro integrale  $\Pi(E_0, 0, t)$  con  $\ln(E_0/\beta) = 6$ . Sono dati i risultati di Snyder (S), Bernstein (Be), Bhabha e Chakrabarty (B.C.) e quelli ottenuti con la (23) per  $n_0 = 2$  ed  $n_0 = 6$ .

$t$	S.	Be.	$n_0 = 6$	$n_0 = 2$	B.C.
1	6.33	5.47	6.4	5.4	7.0
2	26.7	22.73	18.6	15.0	18.48
3	41.0	31.50	29.9	25.9	30.0
4	53.42	39.33	37.8	33.2	36.8
5	57.33	42.89	40.6	34.8	38.0
6	54.20	43.09	40.6	31.3	34.86
7	46.42	40.71	38.5	26.9	28.8
8	37.25	36.39	34.0	21.5	23.96
10	20.16	27.30	23.7	11.6	12.45
12	9.67	18.06	14.8	5.4	6.11
14	4.8	10.19	8.8	2.3	2.8
16	1.67	5.46	4.5	0.7	1.2

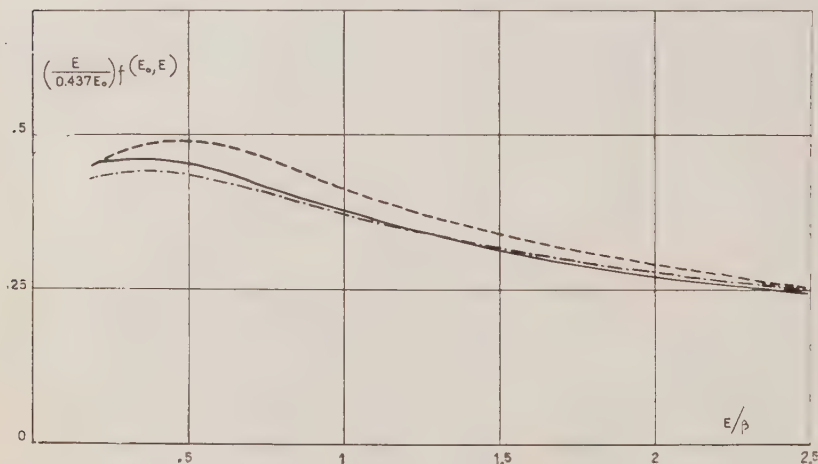


Fig. 1. - Traccia differenziale per gli elettroni da elettrone. — (24) per  $n_0 = 6$ ; --- Richards e Nordheim; -.- Tamm e Belenky.

<sup>(12)</sup> Cfr. tab. 5 del lavoro di H. S. SNYDER: *Phys. Rev.*, **76**, 1563 (1949).

La  $F(E_0, 0)$  calcolata per  $n_0 = 2$  dà  $0,645(E_0/\beta)$ , e l'approssimazione è quindi confrontabile con quella di B.C. Come si vede inoltre dalla tab. 2, per  $\ln(E_0/\beta) = 6$  la curva di transizione data dalla (23) ha lo stesso andamento di quella di B.C., salvo un fattore di riduzione dell'ordine di  $0,65/0,69$ .

Si conclude che a parità di  $n_0$  la soluzione (23) rappresenta un'ottima approssimazione della soluzione integrale di B.C.. La (23) però è indeterminata per  $n_0 \rightarrow \infty$ , in quanto tale è la  $K(s)$ . Le  $K_n(s)$  sono, per  $s = 1$ , positive per  $n_0 \leq 4$ , quindi di segno alterno e divergenti in valore assoluto. Sommando i termini a due a due per  $n > 4$ , si vede che il valore di  $n_0$  che si avvicina di più alla

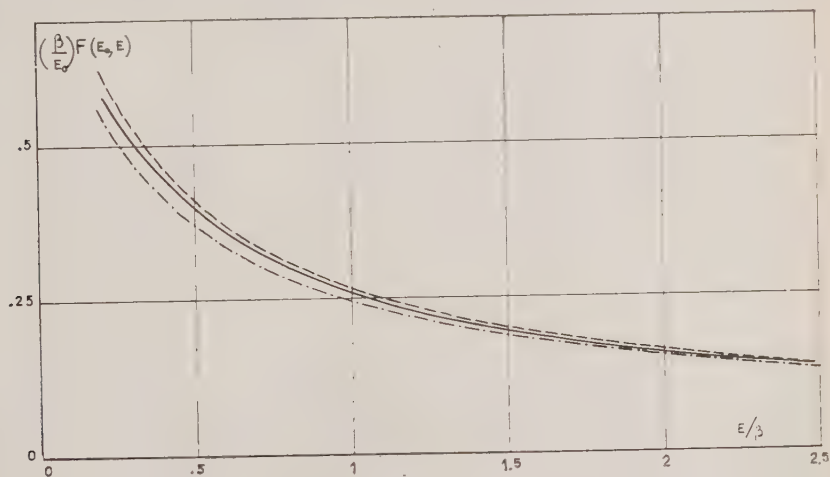


Fig. 2. — Traccia integrale per gli elettroni da elettrone. — (24) per  $n_0 = 6$ ; --- Richards e Nordheim; -.-.- Tamm e Belenky.

condizione espressa dalla (13), è  $n_0 = 6$ , che dà  $F(E_0, 0) = 0,88(E_0/\beta)$ . Mantenendo sette termini dello sviluppo si ha quindi un errore massimo del 0,12 per  $E = 0$ , che si riduce rapidamente al crescere di  $E$ . In fig. 1 e fig. 2 sono date rispettivamente le tracce differenziali ed integrali calcolate per  $n_0 = 6$  e sono riportate per confronto anche le curve di Tamm e Belenky e di Richards e Nordheim. Come si vede, è essenziale imporre la condizione energetica per avere dei risultati confrontabili con quelli ottenuti dall'integrazione numerica delle equazioni di diffusione.

Per  $\ln(E_0/\beta) = 6$  la (23) è stata calcolata anche per  $n_0 = 6$ . Dalla tab. 1, si legge che lo scarto del 0,12 è localizzato nell'intorno del massimo della curva di transizione, mentre prima e dopo il massimo i nostri punti rendono più che non quelli di B.C. la curva della teoria di Snyder, che soddisfa esattamente la condizione  $F(E_0, 0) = E_0/\beta$ .

Riteniamo pertanto che la (23) possa essere utile per il calcolo delle curve di transizione per  $E > 0$ , sia per la sua semplicità, sia perchè priva di quella discontinuità che le soluzioni di approssimazione  $B$  di Rossi e Greisen presentano in prossimità del valore  $E = \beta$ .

Per  $E = 0$  la (23) possiede un altro vantaggio, casuale ma interessante. Confrontando la seconda e la terza colonna della Tab. 2, si vede che la soluzione (23), ottenuta usando le espressioni asintotiche per le sezioni d'urto, dà, almeno nel caso di elementi leggeri, un risultato analogo a quello di BERNSTEIN<sup>(13)</sup>, ottenuto con un laborioso metodo di interazione, partendo dalla soluzione di Snyder come approssimazione zero, e usando quindi le espressioni corrette delle sezioni d'urto. Anche quantitativamente, nei due effetti della diminuzione del massimo e dell'aumento del numero di elettroni presenti verso la fine dello sciame, si ha un ottimo accordo.

(13) I. B. BERNSTEIN: *Phys. Rev.*, **80**, 995 (1950).

---

#### SUMMARY

Starting from a solution of cascade theory given by a series of the kind used by Bhabha and Chakrabarty, the track length problem is solved both for electrons and photons. It is shown that it is possible to give a recurrence formula for the terms of the series. For  $E = 0$  the series is indeterminate, but imposing to the integral electron track length to satisfy the energy conservation condition, the results are in good agreement with previous calculations.

## Guidage par suspension sur lames élastiques.

J. E. C. PLAINEVAUX

*Université Libre de Bruxelles*

(ricevuto il 10 Agosto 1953)

**Résumé.** — Après un bref passage en revue des dispositifs utilisés pour le guidage quasi rectiligne d'une pièce suspendue sur lames élastiques, l'auteur indique une méthode de calcul des suspensions où les lames travaillent en flexion sur toute leur longueur. La méthode de calcul, s'inspirant du procédé utilisé par Bernoulli pour la résolution du problème de la Lintearia, tient compte de la grande déformation de la lame et permet de déterminer le mouvement parasite perpendiculaire au mouvement principal.

---

La technique utilise un grand nombre de dispositifs astreignant une pièce à se déplacer en ligne droite. Leur réalisation fait généralement appel à des surfaces assujetties à glisser l'une sur l'autre. Parfois le glissement est remplacé par le roulement grâce à l'interposition de billes ou cylindres intermédiaires.

Les inconvénients de ces dispositifs sont connus. Du point de vue géométrique, la réalisation des surfaces glissantes doit être aussi parfaite que possible, nécessitant l'utilisation des moyens d'exécution les plus précis et souvent les plus coûteux.

Lors des déplacements, les forces de frottement et les forces nées des paramètres de résistance au roulement introduisent de nouvelles difficultés: mouvement de lacet de la pièce, avancement par saccades, etc. De plus les variations dans l'épaisseur du film d'huile et les poussières toujours présentes entre les surfaces glissantes font que les déplacements ne sont qu'approximativement rectilignes même si les surfaces portantes sont géométriquement parfaites. Pour certains problèmes les écarts de linéarité des déplacements sont sans gravité si ces écarts sont reproductibles. Malheureusement ces écarts sont généralement accompagnés d'une hystérèse et d'une non reproductibilité fort gênantes car ne pouvant être éliminées par un étalonnage préalable des déplacements de l'appareil.

En présence de ces difficultés, on s'est demandé s'il n'était pas possible de construire un dispositif supprimant tout glissement et roulement, éliminant ipso facto, l'action particulièrement néfaste du lubrifiant et des poussières.

La solution qui se présente immédiatement à l'esprit est la suspension élastique de l'objet à déplacer. Cette solution est relativement peu coûteuse; elle est utilisée depuis longtemps par les constructeurs de capteurs de vibration du type sismique, dans le but, il est vrai, de supprimer les frottement de Coulomb. Pensons au cardan du sismographe de Wiechert, au pendule horizontal Mainka, au pendule de Galitzin. Ce sont là des sismographes pas ou peu transportables et où le montage sur ressorts est utilisé en remplacement d'articulations sur couteaux. Dans d'autres appareils la suspension sur ressorts est utilisée pour réaliser un guidage rectiligne, citons:

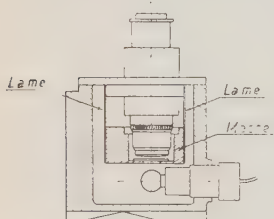


Fig. 1.

Le capteur de vibration électrodynamique Philips, où la masse sismique est suspendue à l'intervention de deux membranes circulaires très flexibles ayant un double but: guider la masse linéairement et fournir la force de rappel nécessaire au sismographe.

Le vibromètre <sup>(1)</sup> de la Société Genevoise de Physique (fig. 1), qui se compose d'une masse parallélépipédique pouvant osciller horizontalement par rapport au bâti auquel la relie deux lames élastiques encastrées à l'une de leurs extrémités au bâti, à l'autre dans la masse. Dans cet appareil la masse sismique pend aux lames flexibles; le poids de la masse exerce une action stabilisatrice. Nous dirons que le montage de la suspension est en U.

Quittons les exemples où la suspension possède, en plus de son but de guidage, une fonction de force de rappel et passons à des exemples de construction où la suspension à ressort n'intervient que comme procédé de guidage.

ERLINGER de la Société Schenck de Darmstadt <sup>(2)</sup> a construit une table vibrante guidée sur ressorts et destinée à l'essai aux vibrations d'appareils divers. Cette table, de 400 × 400 mm, pouvant supporter 50 kg est montée sur deux lames de ressort travaillant en flexion. Ici, la table, horizontale, est au dessus des encastrement des lames dans le bâti. Le poids de la table tend à créer une instabilité des lames. Nous dirons que le montage est en U renversé.

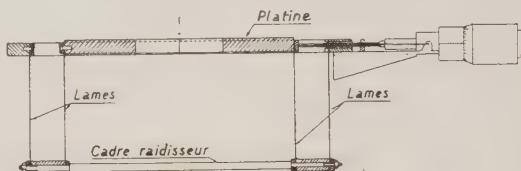


Fig. 2.

Remarquons que dans ces exemples la course de l'objet guidé n'est guère importante: 4 mm dans le capteur Philips, 12 mm dans la table de Schenck.

Récemment, COSYNS <sup>(3)</sup> a proposé et construit le prototype d'un microscope

<sup>(1)</sup> *Métaux et Machines* (Octobre 1935), page 367.

<sup>(2)</sup> *Die Messtechnik*, Heft 4 (1934).

<sup>(3)</sup> COSYNS: *Bull. du Centre de Phys. Nucl. de l'Univ. Libre de Bruxelles*, n. 30 (Août 1951).



destiné aux mesures sagittales de haute précision où la platine est montée sur lames élastiques afin d'éviter les irrégularités de mouvement des meilleurs chariots habituels. A l'examen (fig. 2), on constate que le guidage qu'il utilise est une combinaison des deux dispositifs que nous avons décrits: le dispositif en U et le dispositif en U renversé. Par l'emploi de ces deux dispositifs combinés on peut, pour une platine horizontale, s'attendre à une réduction des écarts par rapport à la ligne droite, écarts mesurés dans un plan vertical. Ces écarts seraient même annulés si le dispositif pouvait être construit avec une platine et un cadre raidisseur de poids rigoureusement nuls.

Ce que nous venons de dire peut être facilement montré d'une manière qualitative en se dispensant de faire aucun calcul. Considérons (fig. 3 *b*) une suspension sur lames à ressort *entièrement* symétrique du type utilisé par COSYNS et dessinée dans une position déformée. Dans la suspension non déformée (fig. 3 *a*), le cadre raidisseur était à une distance  $2L$  en dessous du bâti et la platine était à  $2L$  au dessus du cadre raidisseur, c'est-à-dire que la platine était au niveau du bâti. Dans la position déformée, si la platine et le cadre raidisseur sont de poids nuls les sollicitations des deux lames sont identiques, c'est-à-dire que la platine se rapprochant du cadre raidisseur d'une certaine quantité, le cadre raidisseur se rapproche du bâti de la même quantité, donnant lieu à un déplacement rigoureusement rectiligne de la platine.

Lorsqu'on ne néglige pas le poids  $2P$  de la platine et le poids  $2p$  du cadre raidisseur, il n'en est plus de même. Isolant les lames (fig. 3 *b*), on constate que maintenant chaque ressort supportant la platine est en plus sollicité par une force verticale égale à  $P$  et dont l'action, diminuant la longueur de la lame tend à créer une instabilité de celle-ci. En résistance des matériaux on dira qu'il y a danger de flambage de la lame, bien que les charges que nous considérons ici soient bien loin en dessous de la charge critique de flambage. Par contre la lame portant le cadre raidisseur est sollicitée par une force verticale  $P+p$  tendant à allonger la lame et ne créant aucune instabilité. L'action de cette force stabilisatrice tend à réduire l'importance du raccourcissement vertical de la lame, raccourcissement vertical dû aux forces horizontales.

Il résulte de ce qui précède que la lame supportant la platine se raccourcit plus verticalement que la lame supportant le cadre raidisseur; on en déduit que la platine, tout en restant parallèle à elle-même est descendue par rapport au bâti. La platine décrit donc dans le plan vertical une courbe en dos d'âne présentant son sommet pour la position moyenne, dite « libre » (sans contrainte des lames).

Dans cette étude nous calculerons le déplacement de la platine parallèlement à elle-même dans le plan vertical, nous bornant aux platines symétriques et symétriquement chargées. N'ayant pas trouvé de trace de méthode

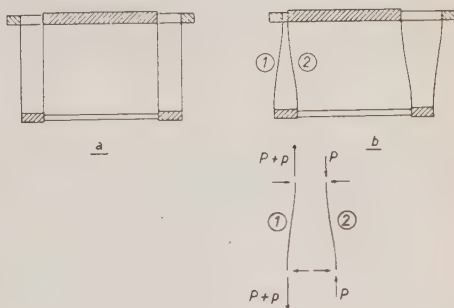


Fig. 3.

de calcul de dispositifs de ce genre dans la littérature, nous croyons que la méthode que nous présentons ici est originale.

Le montage de la lame élastique est tel que, lors de sa déformation, ses extrémités restent verticales sous l'action de couples transmis aux encastresments. La lame est en outre sollicitée par deux forces horizontales égales et opposées ainsi que par deux forces verticales égales et opposées, orientées de manière à « stabiliser » la lame ou à tendre à la faire flamber.

En ce qui concerne la flèche  $2\xi$  de la lame dans le sens horizontal sous l'action des seules forces horizontales  $f_0$  et couples d'encastrement, la résistance des matériaux conduit immédiatement à la formule approchée suivante:

$$2\xi = \frac{f_0(2L)^3}{12EI},$$

$E$  représentant le module d'élasticité du matériau dont est fait la lame,  $I$  le moment d'inertie géométrique de la lame par rapport à sa fibre neutre et  $2L$  la longueur de la lame.

On pourrait de même calculer facilement la flèche horizontale approchée de la lame lorsqu'une force verticale est en plus présente.

En ce qui concerne la longueur verticale de la lame déformée, les procédés classiques de la résistance des matériaux sont en échec. En effet, dans les calculs de déformation par moment fléchissant, lorsqu'on se limite au domaine des petites déformations, on assimile la courbure de la pièce déformée à la dérivée seconde de la flèche par rapport à l'axe de la pièce non déformée; ce qui revient à dire que l'on assimile l'arc de poutre déformée à sa projection sur l'axe de la poutre non déformée. En d'autres mots la lame ne se raccourcit pas suivant son axe non déformé.

Cette assimilation n'a évidemment aucun sens dans le problème qui nous occupe. Nous devons donc étudier la déformation de la lame dans le domaine des grandes déformations et reprendre l'expression correcte de la courbure. C'est ce que nous allons faire en nous rappelant la méthode utilisée par Bernoulli dans la résolution du problème de la Lintearia. Ce problème présente en effet quelque analogie avec la question qui nous occupe.

Nous supposons que les déformations sont uniquement dues au moment fléchissant. Remarquons que la lame déformée est une courbe impaire et que le rayon de courbure au centre de symétrie est infini. Il en résulte que nous pouvons nous borner à étudier la déformation d'une moitié de la lame.

Étudions d'abord le cas de la force verticale créant l'instabilité (fig. 4).

Prenons l'origine des coordonnées  $O$  au point d'inflexion de la fibre neutre de la lame déformée, un axe  $Ou$  horizontal et un axe  $Ov$  vertical. Soit  $A(\xi, \eta)$  l'extrémité de la lame déformée. En ce point la tangente est verticale.

En  $A$  agissent une force verticale  $P$  et une force horizontale  $f$  de résultante  $F$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. De plus un moment d'encas-

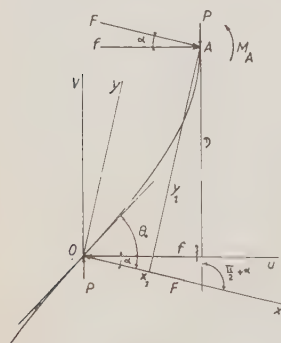


Fig. 4.

trement  $M_A$  agit en ce point. Effectuons en  $O$  une coupure, nous sommes conduits à introduire des forces égales et opposées à celles agissant en  $A$ .

Introduisons un système d'axes:  $Ox$  aligné suivant  $F$  et  $Oy$  perpendiculaire à  $Ox$ . Soient  $x_1, y_1$  les coordonnées de  $A$  dans ce nouveau système d'axes.

Désignons par  $\theta$  l'angle que fait la tangente positive en un point de la déformée avec  $Ox$ ;  $\theta_0$  est l'angle que fait la tangente d'inflexion en  $O$  avec  $Ox$ . Désignons encore par  $ds$  la longueur d'arc en un point, par  $E$  le module d'élasticité du matériau constituant la lame et par  $I$  le moment d'inertie géométrique de la lame par rapport à la fibre neutre.

Avec ces notations, on a:

$$EI \frac{d\theta}{ds} = Fy,$$

$d\theta/ds$  étant la courbure de la lame.

Dérivant par rapport à  $s$ , on en déduit:

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = F \frac{dy}{ds} = F \sin \theta.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par  $d\theta/ds$  et intégrons entre l'origine et un point quelconque; en tenant compte de ce que  $(d\theta/ds)_0=0$ , il vient la relation

$$\frac{EI}{2} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = F(\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

qui réarrangée et prise entre  $O$  et  $A$  pour une lame de longueur totale  $2L$  donne, tenant compte de ce que  $\theta_A = (\pi/2) + \alpha$

$$\int_{\theta_0}^{(\pi/2)+\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2) - \cos^2(\theta/2)}} = 2 \sqrt{\frac{F}{EI}} \int_0^L ds,$$

dont le premier membre est une intégrale elliptique de 1<sup>re</sup> espèce, que l'on ramène à la forme canonique de Legendre par la transformation

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi,$$

d'où finalement:

$$(1) \quad L \sqrt{\frac{F}{EI}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2(\theta_0/2) \sin^2 \varphi}},$$

$\arcsin\{(\cos(\pi/4) + (\alpha/2))/\cos(\theta_0/2)\}$

$\theta_0$  étant un paramètre que l'on exprime en fonction de l'ordonnée  $y_1$  du point  $A$ .

On a, en effet:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta = \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \frac{F}{EI} y^2,$$

d'où, pour le point A où

$$\frac{dx}{ds} = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha \quad \text{et} \quad y = y_1,$$

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2} \frac{F}{EI} y_1^2 - \sin \alpha.$$

Remarquons que l'expression (1) s'écrit de plusieurs manières, d'ailleurs toutes équivalentes. Inversant l'intégrale elliptique, on trouve tous calculs effectués:

$$(1') \quad \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \operatorname{cn} L \sqrt{\frac{F}{EI}},$$

où:

$$(1'') \quad L \sqrt{\frac{F}{EI}} = \int_0^{\operatorname{arc} \cos \{(\operatorname{tg} (\theta_0/2))/\operatorname{tg} ((\pi/4) + (\alpha/2))\}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 (\theta_0/2) \sin^2 \varphi}}.$$

Introduisant des angles auxiliaires  $\psi$  et  $\mu$  tels que:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sqrt{(F/EI)} y_1}{2 \cos ((\pi/4) + (\alpha/2))} \quad \sin \mu = \cos \frac{\theta_0}{2} = \frac{\cos ((\pi/4) + (\alpha/2))}{\cos \psi},$$

$\mu$  étant l'angle modulaire au sens des tables de Legendre; on trouve:

$$(1''') \quad (1'') \quad L \sqrt{\frac{F}{EI}} = \int_0^{\operatorname{arc} \sin \{(\sin \psi)/\sin ((\pi/4) + (\alpha/2))\}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \mu \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \{(\operatorname{tg} \psi)/(\cos \mu)\}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \mu \sin^2 \varphi}},$$

ou encore:

$$(1'') \quad L \sqrt{\frac{F}{EI}} = \int_{(\pi/2) - \psi}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \mu \sin^2 \varphi}}.$$

Toutes ces expressions sont équivalentes. Pour le choix de la formule à utiliser, on se laissera guider par les tables d'intégrales elliptiques dont on dispose.

Ayant déterminé l'ordonnée  $y_1$  du point  $A$  dans le système d'axes  $Ox, Oy$  par une des formules qui précèdent, on doit déterminer l'abscisse  $x_1$ . Pour cela remarquons que l'on a :

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} = \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \frac{F}{EI} y^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{EI} (y_1^2 - y^2) - \sin \alpha,$$

on en déduit

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{1 - \left[ \frac{1}{2} \frac{F}{EI} (y_1^2 - y^2) - \sin \alpha \right]^2},$$

expression qui, intégrée entre  $O$  et  $A$ , nous ramènerait aux formules (1). L'élimination de  $ds$  entre les deux équations précédentes donne :

$$dx = \frac{\frac{1}{2} \frac{F}{EI} (y_1^2 - y^2) - \sin \alpha}{\sqrt{1 - \left[ \frac{1}{2} \frac{F}{EI} (y_1^2 - y^2) - \sin \alpha \right]^2}} dy,$$

qui, après avoir posé

$$y = y_1 \sqrt{1 + \frac{F}{EI} y_1^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \varphi},$$

et intégré entre  $O$  et  $A$  donne, tous calculs effectués :

$$x_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} = \int_{\arcsin \{(\cos(\pi/4) + (\alpha/2))/\cos(\theta_0/2)\}}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2(\theta_0/2) \sin^2 \varphi}} - 2 \int_{\arcsin \{(\cos(\pi/4) + (\alpha/2))/\cos(\theta_0/2)\}}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2(\theta_0/2) \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

Remplaçons la première intégrale du second membre par sa valeur  $L\sqrt{F/EI}$  tirée de (1), il vient :

$$(2) \quad (L - x_1) \sqrt{\frac{F}{EI}} = 2 \int_{\arcsin \{(\cos(\pi/4) + (\alpha/2))/\cos(\theta_0/2)\}}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2(\theta_0/2) \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

que l'on écrit encore

$$(2') \quad (L - x_1) \sqrt{\frac{F}{EI}} = 2 \int_{(\pi/2) - \psi}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \mu \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

les angles  $\psi$  et  $\mu$  étant définis comme précédemment.



Les coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  de l'extrémité  $A$  étant connues dans les axes  $Ox$  et  $Oy$ , on les trouve immédiatement dans les axes horizontal et vertical  $Ou$  et  $Ov$  par les formules :

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha, \\ \eta = y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha. \end{cases}$$

La détermination des tensions de flexion maximum intervenant dans la lame s'obtient en observant que la lame est la plus sollicitée à ses encastrement et que le moment fléchissant qui y règne est égal à  $Fy_1$ .

L'utilisation des formules (1), (2) et (3) permet d'étudier complètement toute suspension sur lames élastiques du type en U renversé.

L'étude du montage du type en U, c'est-à-dire avec force verticale stabilisatrice s'entend de la même manière (fig. 5). Nous n'écrirons pas les calculs, ceux-ci se développant d'une manière tout à fait analogue. Disons que pour obtenir les formules afférentes à ce cas il suffit, dans toutes les formules obtenues précédemment, de simplement changer le signe de l'angle  $\alpha$ .

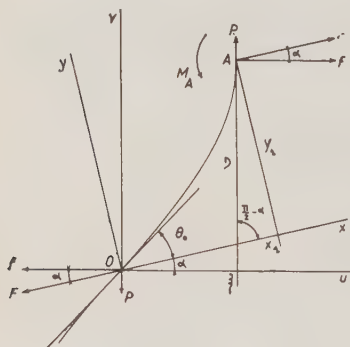


Fig. 5.

Tous les calculs que nous avons effectués se développent beaucoup plus légèrement lorsqu'au lieu d'utiliser les intégrales elliptiques on effectue une inversion, ce qui conduit à travailler au moyen des fonctions elliptiques. C'est un fait bien connu depuis Abel. Nous nous sommes pourtant astreints à utiliser le plus possible la méthode de Legendre, celle-ci étant plus connue des ingénieurs et des physiciens qui hésitent, souvent à tort, à utiliser les fonctions elliptiques. Que les mathématiciens nous le pardonnent !

Les formules que nous avons trouvées permettent aussi de calculer un guidage du type de celui utilisé par COSYNS, celui-ci n'étant, comme nous l'avons montré, qu'une combinaison des deux dispositifs calculés précédemment.

L'abaissement de la platine devant être obtenu par la différence de deux nombres voisins, il y aura lieu d'effectuer les calculs avec beaucoup de précision. Dans un cas d'espèce, il y aura lieu de voir si les calculs ne peuvent être simplifiés en limitant à un petit nombre de termes des développements en série obtenus à partir des formules précédentes.

Remarquons encore que la combinaison de deux dispositifs de guidage sur lames, l'un en U, l'autre en U renversé, ne réalise pas une translation rigoureusement rectiligne même si le chariot est symétriquement chargé. Les écarts en linéarité dans le plan vertical sont diminués, si, à poids de platine et de cadre raidisseur constants, on augmente la rigidité des lames de suspension. Cette solution — excellente pour le guidage — est cependant fort délicate, car elle soumet la vis micrométrique de déplacement à des efforts de compression importants. Sa précision va s'en ressentir et son usure dans le temps risque de devenir importante si des précautions spéciales ne sont pas prises.

Pour obtenir une précision plus grande dans le guidage rectiligne on pourrait

immerger la partie inférieure de la platine convenablement dessinée ainsi que des flotteurs liés au cadre raidisseur, afin de compenser les forces verticales sur les lames. Cette solution, par ailleurs compliquée, n'a jamais été utilisée à notre connaissance. Une autre solution consisterait à utiliser une platine verticale, à poids compensé ou non par immersion partielle dans un liquide (huile, mercure...). Cette solution, à première vue assez déconcertante, mériterait d'être étudiée expérimentalement afin de voir si l'immersion partielle est nécessaire. L'étude théorique d'un tel dispositif ne semble pas facile.

En présence des difficultés que crée la flexibilité de la lame sur toute sa longueur, on peut se demander s'il ne vaudrait pas mieux remplacer les lames par des bielles rigides articulées à leurs extrémités. Si ces articulations sont des paliers sans frottement le guidage n'est pas rectiligne comme on le voit aisément. Il est loisible de remplacer les paliers par des articulations sur ressorts de manière à éviter les irrégularités des paliers. Une réalisation sommaire de ce dispositif est obtenue lorsqu'on utilise une lame très flexible rendue rigide dans sa partie centrale par deux plaquettes solidaires de la lame. Cette dernière solution a été utilisée par la Société S.K.F. dans son comparateur GM1 destiné à la mesure des filetages, ainsi que dans le microscope Cosyns-Koristka. L'enclume mobile du comparateur GM1 est montée sur deux lames rendues rigides dans leur partie centrale. Le montage est du type en U renversé, le bâti et la platine étant à  $45^\circ$  sur l'horizontale.

Une combinaison des montages en U et en U renversé montée avec bielles rigides effectue un guidage rigoureusement rectiligne de la platine si celle-ci est astreinte à effectuer des déplacements doubles de ceux du cadre inférieur. Pour un tel dispositif, où les bielles de longueur  $L$  sont verticales dans la position moyenne de la platine, désignons par  $\lambda$  le déplacement horizontal imposé au cadre inférieur à partir de la position moyenne et par  $2\lambda + \varepsilon$  le déplacement imposé à la platine dans les mêmes conditions. La longueur  $\varepsilon$  représente donc l'erreur du dispositif de duplication des déplacements. Dans ces conditions, on trouve que la partie principale du mouvement parasite dans le plan verticale n'est que  $\varepsilon(\lambda/4L)$ .

Un tel dispositif a en outre l'avantage d'être insensible à un chargement dissymétrique de la platine.

Remarquons que les dispositifs que nous avons envisagés, réalisent facilement un mouvement de translation au sens de la mécanique rationnelle. Les difficultés ne commencent que lorsque cette translation doit être rectiligne. Le problème est beaucoup plus simple lorsque les mouvements doivent être verticaux et non plus horizontaux comme ceux que nous avons envisagés.

La question traitée dans ce travail, avait retenu notre attention depuis longtemps lors de l'étude de l'amplification optique maximum que l'on peut adjoindre à un sismographe du genre de celui de la Société Genevoise de Physique. Le mouvement parasite perpendiculaire au mouvement principal limite en effet l'amplification; car l'objet lumineux lié à la masse, sortant de la profondeur de champ de l'objectif de grossissement, conduit à un manque de finesse des courbes observées ou enregistrées.

## REMERCIEMENTS:

L'auteur tient à remercier tout particulièrement le professeur G. P. S. OCCHIALINI pour ses critiques et ses suggestions lors de nombreuses discussions aussi amicales qu'instructives.

---

## RIASSUNTO (\*)

Dopo aver brevemente passato in rivista i dispositivi utilizzati per la guida quasi rettilinea d'un pezzo sospeso su guide elastiche, l'autore indica un metodo di calcolo delle sospensioni in cui le guide lavorano a flessione su tutta la loro lunghezza. Il metodo di calcolo che s'ispira al procedimento seguito da BERNOULLI nella soluzione del problema della Lintearia tien conto della forte deformazione della guida e permette di determinare il moto parassita perpendicolare al moto principale.

---

(\*) *Traduzione a cura della Redazione.*

## Spark counters.

F. BELLA and C. FRANZINETTI

*Istituto di Fisica dell'Università - Roma*  
*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma*

(ricevuto il 18 Agosto 1953)

**Summary.** — An account is given of a series of experiments which have been undertaken in order to investigate the main characteristics of spark counters. In Part I we give some details of the construction and we present the experimental results. In Part II the experimental results are discussed.

### Introduction.

Attempts have been made<sup>(1)</sup> in many laboratories to produce spark counters to be used in research in cosmic rays and nuclear physics<sup>(2)</sup>.

These counters are interesting because of their very short «reaction time» which allows measurements of time intervals as short as  $10^{-9}$  s. This is very important, especially after the recent discoveries of unstable particles which are believed to have a lifetime of that order of magnitude.

On the other hand the counters suffer from important technical disadvantages. They are difficult to construct and they need a long external quenching pulse. It appears to be generally believed that there is a further serious disadvantage, that the counters have a very short working life. The present work was undertaken in order to study these disadvantages, and to see what useful application could be made of the counters.

---

<sup>(1)</sup> J. W. KEUFFEL: *Rev. Sci. Inst.*, **20**, 202 (1949); R. W. PIDD and L. MODANSKY: *Phys. Rev.*, **75**, 1175 (1949); E. ROBINSON: *Proc. Phys. Soc.*, **IA 66**, 73 (1953); F. BELLA, C. FRANZINETTI and D. W. LEE: *Nuovo Cimento*, **10**, 1335 (1953); F. BELLA and C. FRANZINETTI: *Nuovo Cimento*, **10**, 1338 (1953).

<sup>(2)</sup> Attempts to make spark counters have been performed long time ago. The authors are indebted to Prof. GREINACHER for letting them have a spark counter which he made when at the Physics Laboratory of the University of Bern.

## PART I

## EXPERIMENTAL RESULTS

## 1. - Construction of the counters.

The counters which we have constructed consist of two plane parallel electrodes (*L*) (see fig. 1 and 2) which are supported and rigidly kept in position by two S-shaped metallic pieces (*S*) and pyrex spacers (*I*).

The electrodes were sealed in a pyrex glass envelope which was filled with a mixture of argon and an organic vapour. Several organic vapours have been tried: ethyl alcohol, ethyl ether and xylol. The best counters have been obtained with argon and alcohol in the following proportions:

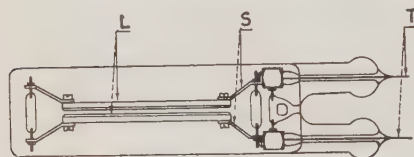


Fig. 1. - Mechanical design. *L*) plane electrodes; *S*) supports; *T*) tungsten terminals.

argon 36 cm Hg ,  
alcohol 4 cm Hg <sup>(3)</sup> .

Counters with different quantities of argon and alcohol have been tested (see paragraph 2-I). In order to obtain the greatest possible efficiency we have tried to make counters at pressures higher than those given above, but we have not been able to make a good counter.

Absolute alcohol (kindly prepared by Mrs. V. SANTORO of this laboratory) was used; commercially pure argon (99.9%) was further purified in the laboratory by passing it for 5 days through calcium filings at 400 °C.

The electrodes were made of copper or steel. No appreciable difference has been observed in the performance of counters made with either metal. Clean electrodes are one of the most important factors in a good counter. The treatment of the electrodes can be summarized as follows:

a) the surfaces were polished with successively finer grades of emery paper;

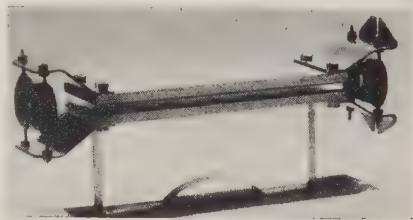


Fig. 2.

<sup>(3)</sup> This statement should be qualified. The best of all counters which we have obtained contained in addition 2 mm of ethyl ether. But we are reluctant to draw any conclusion from a single example, and have not made systematic investigations of the effect of quenching vapours other than alcohol.



b) subsequently they were polished electrolytically in an aqueous solution of  $\text{H}_3\text{PO}_3$  (85% in weight). The surface to be cleaned served as the anode. The cathode was a plane sheet of the same metal; it was placed about one cm from the anode and parallel to it. A potential difference of 4 V was found sufficient to obtain a clean surface in 1 min;

c) the plates were then rinsed in distilled water, dried and mounted in the pyrex envelope.

The counter was degassed in vacuum at a temperature of 400 °C for several hours. Hydrogen was then introduced, in order to reduce the oxide which invariably covered the surface. Usually this operation took about 20 hrs. Once

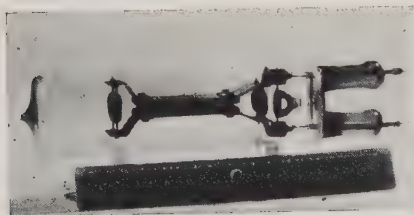


Fig. 3 a).



Fig. 3 b).

it was completed the counter was allowed to cool down and filled with the required mixture.

We have constructed counters of different areas, ranging from  $5 \times 3 \text{ cm}^2$  to  $35 \times 3 \text{ cm}^2$  (see fig. 3 a, b). For the majority of the counters the gap dimension was 2 mm. In the following pages a gap of 2 mm is to be assumed unless otherwise stated.

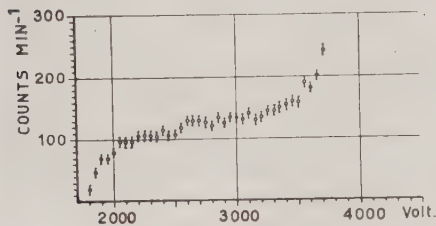


Fig. 4.

## 2. - Characteristics.

The characteristic curve given in fig. 4 shows a typical example of the plateaus obtained with the spark counters which we have made. It refers to a counter having an area of  $10 \times 3 \text{ cm}^2$ , a gap of 2 mm, filled with alcohol at a pressure of 4 cm Hg and argon at a pressure of 36 cm Hg. The counter was externally quenched with a pulse  $10^{-2} \text{ s}$  long. Other examples are given in fig. 13 and 14. With careful preparation of the counters this characteristic is fairly well reproducible. It has been found to depend on the following parameters:

- a) on the length of the quenching pulse,
- b) on the pressure of the argon and of the organic vapours,
- c) on the value of  $p\delta$  (pressure of the mixture  $\times$  dimensions of the gap),
- d) on the temperature.

a) *Dependence on the length  $\tau$  of the quenching pulse.* — Spark counters need to be quenched by an external electronic circuit. The circuit which we used was able to reduce the voltage difference across the gap to practically zero. It was very similar to those quoted in the literature and will not be discussed here. As far as the quenching time is concerned our counters can be divided in two groups:

- «good» counters, those which, with a  $\tau = 10^{-3}$  s, had a plateau of at least 1000 V.
- «bad» counters, the others.

For «good» counters the characteristic was found to be insensitive to changes of  $\tau$ , as long as  $\tau$  was  $\geq 10^{-3}$  s. For  $10^{-4} \leq \tau \leq 10^{-3}$  s the plateau was found to vary between the limits  $1000 \text{ V} \div 500 \text{ V}$ ; and for  $\tau < 10^{-4}$  s the plateau was practically non existent.

«Bad» counters usually show a marked dependence on  $\tau$ . An example is given in fig. 5. From efficiency measurements it appears quite clear that

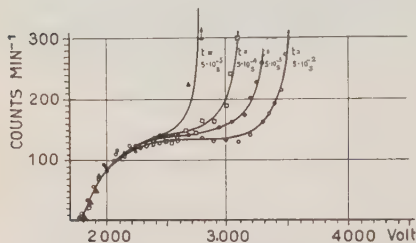


Fig. 5. — Effect of quenching time  $\tau$  on the characteristic of «bad» counter.

the increase in the number of counts which marks the end of the plateau is not due to an increase of efficiency but only to an increase of the background of spurious counts. It has been suggested that these spurious counts are due to the Paetow effect. Submicroscopic bits of insulating material, lying on the electrodes, can be electrically charged by ion bombardment<sup>1</sup> and by photons produced by a spark. Owing to the small size of these insulating particles, very high fields are locally generated. If they

are sufficiently high, they can cause a field emission of electrons from the metal and eventually lead to the production of a spark.

On the other hand, if the counter is quenched for a sufficient time, the insulating particle, which has been charged by a previous spark, might lose its electric charge without producing any spark. Impurities of different size probably need different times to discharge. In this way we can understand why the characteristic of a «bad» counter is  $\tau$ -dependent and varies from one counter to another.

In what follows we shall refer always to «good» counters.

b) *Dependence on the pressure of argon and of the organic vapour.* — We have not made systematic observations with organic vapours other than alcohol.

For total pressures of the mixture  $\leq 40$  cm Hg the best performances of the counters have been obtained when the pressure of the alcohol was 10% of the total. As at normal temperature the vapour pressure of alcohol is about 4 cm, it is not possible to increase the total pressure in the counter above 40 cm without, at the same time, reducing the relative pressure of alcohol. This is probably why we failed to make «good» counters with a total pressure exceeding 40 cm Hg.

The effect of the alcohol (or of other organic vapours) in spark counters

is not yet quite clear. It has been suggested <sup>(4)</sup> that it is responsible for the formation of a film on the electrodes, which has an important influence on the characteristic of the counter.

In order to obtain more information about this effect we have investigated the behaviour of counters filled with the following mixtures:

- |                |            |                       |
|----------------|------------|-----------------------|
| (1) alcohol    | at 4 cm Hg | and argon at 36 cm Hg |
| (2) »          | » 1.5 »    | » » » » »             |
| (3) no alcohol |            | » » » » »             |
| (4) alcohol    | at 4 cm Hg | and argon at 20 cm Hg |
| (5) »          | » »        | » no argon.           |

(1) is the normal mixture discussed above. The spark appears as a luminous filament, about 1/2 mm in diameter, more luminous near the cathode (see fig. 9). With mixture (2) the counters have a plateau of not more than 300 V. The sparks appear larger (about 2 mm in diameter). With (3) they have no plateau and the sparks are about 5 mm in diameter, and much less bright. In (4) and (5) the vapour pressure was maintained as high as possible and the gas pressure was varied. With 20 cm Hg of argon the sparks were hardly visible (in normal light). With no argon they were not visible <sup>(5)</sup> even in the dark, though they were recorded by the electronic circuit and could be heard. As the ionizing potential for alcohol is smaller than that for argon, it seems reasonable to assume that the alcohol must play a role in the development of the avalanche itself. Also, it suppresses the production of photoelectrons by absorbing ultraviolet photons: so presumably they are responsible for confining the avalanche to the narrow central region where the production of electrons and photons is higher. More information is necessary before one can draw any definite conclusion.

c) *Dependence on  $p\delta$ .* — The dependence of the threshold on the distance  $\delta$  between the electrodes was investigated for different values of  $p$ . The results are consistent with the assumption that the threshold voltage is a function of the product  $p\delta$  and are plotted in fig. 15. Black points refer to a total pressure of 40 cm Hg, the others to 10 cm Hg. In both cases the alcohol pressure was 10% of the total.

d) *Dependence on the temperature.* — We have observed a marked dependence of the characteristics on the temperature (see fig. 6 and 7). It can be seen that counters have a normal behaviour only if the temperature is kept between 15 °C and 35 °C. These curves refer to a mixture of 4 cm Hg of alcohol and 36 cm Hg of argon.

<sup>(4)</sup> J. W. KEUFFEL: loc. cit. <sup>(1)</sup>.

<sup>(5)</sup> With a mixture consisting of pure alcohol only, the radiation associated with the spark is presumably in the infrared region.

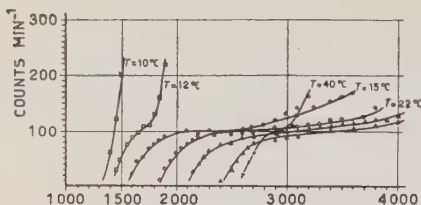


Fig. 6. - Effect of temperature on counter characteristics.

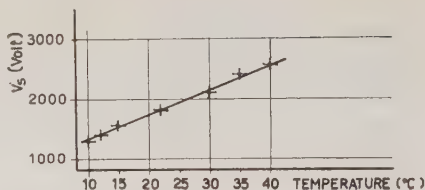


Fig. 7. - Effect of temperature on the threshold potential.

### 3. - Ageing effect.

It has been mentioned in the literature that spark counters deteriorate very quickly (in one or two months). One of our counters has been working continuously for 6 months; it has counted about  $10^7$  sparks and is still working. Other counters, built more recently have counted  $10^6$  counts and they do not show any sign of deterioration.

### 4. - Efficiency.

An arrangement schematically indicated in fig. 8 was made to measure the efficiency of spark counters. C-IV is a 4-fold coincidence set controlled

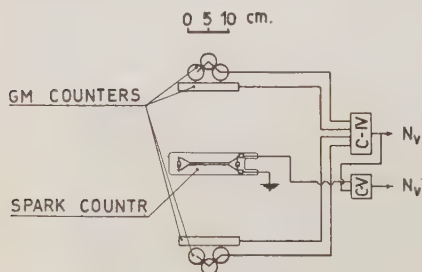


Fig. 8.

by the simultaneous discharge of at least one counter from each of the trays. It can therefore be operated only by a particle which has traversed the parallel plate counter.

C-V is controlled by those events in which a 4-fold coincidence C-IV is associated with the simultaneous discharge of the spark counter. If  $N_{IV}$  is the number of events recorded by C-IV and  $N_V$  by C-V, then  $N_V : N_{IV} = R$  is the efficiency of the counter.

We have measured the efficiency at different angles:  $\theta = 0$  and  $\theta = 45^\circ$ , where  $\theta$  is the angle between the axis of the counter telescope and the normal to the plane of the counter.

The results are plotted in fig. 12.

### 5. - Possible applications of spark counters.

At the present stage of their technical development, the spark counters have the following advantages and disadvantages with respect to other techniques which are commonly used in cosmic ray and nuclear physics.

### I. *Advantages:*

- a) they allow measurements of  $10^{-9}$  s time intervals;
- b) they allow the position of a point on the track of an ionizing particle to be located to within  $1 \text{ mm}^3$ ;
- c) they have very large output pulses: of the order of several hundred volts. This avoids the introduction of amplifiers which are often necessary for G.M. counters;
- d) With a quenching time of a millisecond they have a plateau of  $\sim 1000 \text{ V}$ ;
- e) by suitably adjusting the value of  $p\delta$  (pressure of the mixture  $\times$  distance between the electrodes) one can obtain for particles of given ionizing power an efficiency which strongly depends on the direction of incidence (see also § 5.II).

### II. *Disadvantages:*

- a) considerable care is needed in construction, particularly in the polishing of the plane surfaces. Only 40% of the counters built by us could be considered «good» counters;
- b) they need an external quenching circuit; even with the best counters obtained, a quenching time of  $10^{-4}$  s was required in order to have some plateau. This makes it impossible to use them whenever high intensity radiations are to be recorded;
- c) they can only be used between 15 and  $35^\circ\text{C}$ .

In order to make use of their good space definition it is necessary to take photographs of sparks. In fig. 9 we show a photograph of sparks obtained during a 10 s exposure.

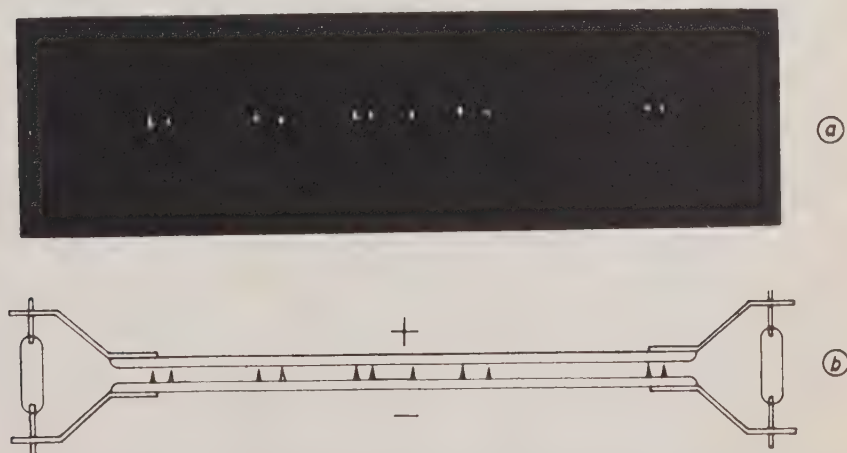


Fig. 9. - a) Photograph of sparks from a counter.

b) Corresponding sketch of the experimental arrangement.



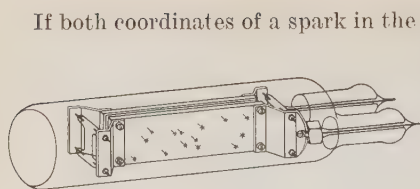


Fig. 10.

If both coordinates of a spark in the plane of the counter are to be measured, two simultaneous photographs are necessary. In order to avoid this, a counter having a semi-transparent electrode has been built, by plating a pyrex surface which had been optically worked. A layer of copper  $\sim 100 \mu$  thick has been deposited by evaporation. Sparks were clearly visible as indicated in fig. 10 but there

was not enough light to take photos. Other more transparent electrodes are being constructed.

The following conclusions can be drawn from the results which we have obtained: it appears that the spark counters can be used for experiments in cosmic rays and nuclear physics. They are particularly valuable when good definition in both time and space is required.

## PART II

### DISCUSSION OF THE EXPERIMENTAL RESULTS

#### 1. — Meek's criterion for streamer formation.

Let us consider what happens when an electron is freed by an ionizing particle which crosses the gap between the electrodes of a plane-parallel spark counter. If a convenient potential drop is applied to the electrodes, the electron will start moving toward the anode creating ion pairs at an average rate of  $\alpha$  per cm, so that after a path  $z$  the average number of electrons created will be  $e^{\alpha z}$ . An equal number of positive ions will be created. Their mobility is less than 1/100 of that of the electrons and in practice we can treat them as stationary. They will form a column of positive charges, having a conical shape due to the lateral spread of the electron avalanche as it advances. The average radius of the avalanche has been measured by RAETHER<sup>(6)</sup> and found in good agreement with the formula

$$r = \sqrt{2Dz/v},$$

$D$  being the coefficient of diffusion of the electrons and  $z/v$  the time of advance of the avalanche.

The ionic density is greatest at the apex pointing to the anode. The

---

<sup>(6)</sup> H. RAETHER: *Zeits. f. Phys.*, **91**, 107 (1937). See also L. B. LOEB and J. M. MEEK: *The Theory of the Electric Spark*, Chap. II.

electric field  $E_s$ , due to this space charge, can be found to be <sup>(7)</sup>

$$E_s \cong \frac{4}{3} \frac{\varepsilon \alpha e^{\alpha z}}{r},$$

where  $\varepsilon$  is the electronic charge and  $z$  is the path travelled by the avalanche from the point of its creation. According to MEEK <sup>(7)</sup> the «positive space charge develops towards the cathode from the anode as a self-propagating positive space-charge streamer» when

$$(1) \quad E_s = k \cdot E_0,$$

$k$  being a coefficient the value of which lies, for air at  $NPT$ , between 0.1 and 1. This equation is quoted in the literature as Meek's criterion.

## 2. — Efficiency of a spark counter.

If the luminous filamentary sparks which we have observed in our counter are to be identified with the formation of space charge streamers, then Meek's criterion gives us the condition which is to be satisfied in order to produce a spark.

Let us consider a plane parallel spark counter. When an ionizing particle crosses the gap, it will create  $\nu$  pairs of ions, the  $z$ -coordinate of which will be within the intervals

$$z_1, \quad z_1 + dz_1; \quad z_2, \quad z_2 + dz_2; \quad \dots \quad z_\nu, \quad z_\nu + dz_\nu;$$

distributed at random along the track. The electrons of each of these ion pairs have a probability  $F$  of developing an avalanche which will satisfy Meek's criterion (1) before hitting the anode.

In the development of an avalanche, each electron, as it advances, is converted into two electrons, either by direct ionization or by the intermediate excitation of an atom which will then radiate a photon and eventually free another electron.

From the statistical point of view this is a «Furry process» and the probability that after a certain distance  $t$  the number of the electrons created by the avalanche is  $\geq n$  is

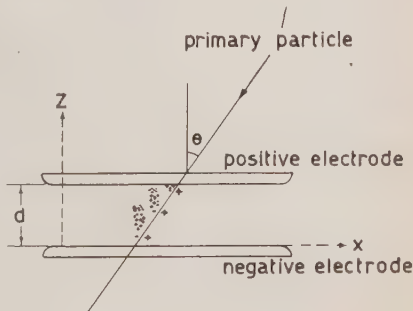


Fig. 11.

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t})^{n-1} = (1 - e^{-\alpha t})^{n-1}.$$

(7) See L. B. LOEB and J. M. MEEK: loc. cit., Chap. II.

As, in our case,  $n \gg 1$ , we can write

$$F = (1 - e^{-\alpha t})^n.$$

If  $n$  is the total number of electrons created in the avalanche after a distance  $t$  from its starting point, the number of pairs created in a layer between  $t$  and  $t + dt$  is

$$dn = \alpha \cdot n \cdot dt.$$

Assuming the avalanche to have a circular cross-section of radius  $r$ , the ion density in this layer will then be

$$N = \frac{\alpha n}{\pi r^2},$$

or

$$n = \frac{\pi r^2 N}{\alpha} = k \frac{3r}{4\varepsilon\alpha} E_0 = A \frac{V}{\alpha},$$

where

$$A = \frac{3kr}{4\varepsilon\delta}; \quad \frac{V}{\delta} = E_0,$$

if Meek's criterion is to be satisfied.

If  $\bar{\nu}$  is the average number of ion pairs created per cm by an ionizing particle in the gas enclosed in the counter, then this particle has a probability  $\pi_\nu dz_1 dz_2 \dots dz_\nu$  of creating  $\nu$  ion pairs within certain intervals  $dz_1 dz_2 \dots dz_\nu$ . The probability  $\pi_\nu$  is given by

$$\pi_\nu dz_1 dz_2 \dots dz_\nu = \frac{e^{-\bar{\nu}\delta}}{\nu!} \bar{\nu}^\nu dz_1 dz_2 \dots dz_\nu.$$

We assume that each of these pairs can create an avalanche independently of the others. The probability that at least one will eventually develop a spark is then easily found to be

$$(2) \quad p_\nu = 1 - \mathcal{J}(t_1)\mathcal{J}(t_2) \dots \mathcal{J}(t_\nu),$$

where

$$t_i = \delta - z_i; \quad \mathcal{J}(t_i) = 1 - F(t_i) = 1 - (1 - e^{-\alpha t_i})^n.$$

Therefore, the probability that a particle of a certain ionizing power gives rise to a spark is

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\nu} \int_0^{\delta} \int_0^{\delta} \dots \int_0^{\delta} \pi_\nu p_\nu dz_1 dz_2 \dots dz_\nu = \\ &= \sum_{\nu} \frac{e^{-\bar{\nu}\delta}}{\nu!} \bar{\nu}^\nu \int_0^{\delta} \int_0^{\delta} \dots \int_0^{\delta} [1 - \mathcal{J}(\delta - z_1) \mathcal{J}(\delta - z_2) \mathcal{J}(\delta - z_3) \dots \mathcal{J}(\delta - z_\nu)] dz_1 \dots dz_\nu = \\ &= 1 - \sum_{\nu} \frac{e^{-\bar{\nu}\delta}}{\nu!} (\bar{\nu}\delta)^\nu \left[ \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \mathcal{J}(\delta - z) dz \right]^\nu. \end{aligned}$$

Inserting the value of  $J$  in the integral on the right hand side of this equation one gets

$$R = 1 - \sum_v e^{-\bar{v}\delta} \frac{(\bar{v}\delta)^v}{v!} \left(1 - \frac{J}{\delta}\right)^v = \\ = 1 - \exp \left[ -\bar{v}\delta + \bar{v}\delta \left(1 - \frac{J}{\delta}\right) \right] = 1 - e^{-\bar{v}J},$$

where

$$J = \delta \int_0^1 (1 - e^{-\alpha\delta\eta})^n d\eta,$$

$J$ , like both  $\alpha$  and  $n$ , is a function of  $E/p = V/p\delta$ .

As in our case  $\delta$  and  $p$  are constant  $J$  is a function of  $V$  only.  $J(V)$  is very well approximated by the function

$$J(V) = \frac{1}{\alpha} [-Ei(-\lambda)] - \frac{e^{-\lambda}}{2n\delta} \varphi_0(\alpha\delta) + \dots,$$

where

$$\varphi_0(\alpha\delta) = 1 - \frac{e^{-\alpha\delta}}{6} - \frac{e^{-2\alpha\delta}}{12} + \dots, \\ \lambda = -n \ln(1 - e^{-\lambda\delta}) \cong ne^{-\alpha\delta}.$$

With a good approximation we can put

$$(3) \quad R(V) = 1 - \exp \left[ -\frac{\bar{v}}{\alpha} (-Ei(-\lambda)) \right].$$

It must be pointed out that  $\bar{v}\delta$  is the average number of ions created by the incident particle in the gap. This value depends upon the angle  $\theta$  (see fig. 11) between the direction of the particle and the perpendicular to the plane of the counter. If  $\bar{v}_0\delta$  is the average number of ion pairs created by a particle incident normally ( $\theta = 0$ ), we have obviously,

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}_0}{\cos \theta},$$

and so

$$(3') \quad R(V, \theta, \bar{v}_0) = 1 - \exp \left[ -\frac{\bar{v}_0}{\alpha \cos \theta} (-Ei(-\lambda)) \right].$$

(3') represents the «efficiency» of a plane parallel spark counter. From this formula we can immediately deduce the equation of the «characteristic» if the angular distribution and the ionizing power of the radiation incident on

the counter are known. Let  $f(\theta, \bar{v}_0) \sin \theta d\theta d\bar{v}_0$  be the function giving the number of particles incident per unit time and unit area at an angle between  $\theta$  and  $\theta + d\theta$ , having an ionizing power between  $\bar{v}_0$  and  $\bar{v}_0 + d\bar{v}_0$  then the number of counts per unit time of a counter having an area  $A$  will be

$$(4) \quad N(V) = A \iint R(V, \theta, \bar{v}_0) f(\theta, \bar{v}_0) \sin \theta d\theta d\bar{v}_0.$$

In the simple case of a distribution of particles given by  $f(\theta, \bar{v}_0) \sin \theta d\theta d\bar{v}_0 = AN_0 \sin \theta d\theta$  the integral can be calculated immediately

$$(5) \quad \begin{cases} N(V, \bar{v}_0) = AN_0[1 - e^{-a} + a(-Ei(-a))], \\ a = -\frac{\bar{v}_0}{\alpha} Ei(-\lambda), \end{cases}$$

where  $N_0$  is the total number of incident particles per unit surface.

### 3. - Numerical calculation and comparison with the experiments.

In order to make a comparison with the experiments we should know the values of the parameters involved in formulae (3') and (5):  $k$ ,  $r$ ,  $\alpha$ .

For air at *NPT*,  $k$  has been found to be within the limits  $0.1 \leq k \leq 1$ , about 0.1 being the most probable value. Although its physical significance is clear, it would be probably a very elaborate task to calculate it theoretically. On the other hand the numerical results are not very sensitive to small changes in  $k$ . For the purpose of the present work it might be reasonable to assume that  $k$  for argon-alcohol mixtures is of the same order of magnitude as for air. We shall take  $k = 0.1$ .

The value of  $r$  is dependent on the diffusion coefficient and the drift velocities  $v$ : namely  $r = \sqrt{2Dz}/v$ . As far as we know it has not been measured for mixtures of gases such as ours. Here again we are forced to take a value in reasonable agreement with observations. We set  $r = 10^{-2}$  cm.

It must be pointed out that  $r$  is dependent on the pressure of the gas and the length of the gap. However it is roughly proportional to  $(\delta/p)^{1/2}$  and again the numerical results are not very sensitive to small changes in the value of  $r$ .

On the contrary they are very sensitive to changes of  $\alpha$ . We make the tentative assumption that  $\alpha$  is represented, in the interval of voltages with which we are concerned, by the well known classical formula

$$\alpha = \alpha_0 \exp\left(\frac{-Bp\delta}{V}\right),$$

where  $\alpha_0$  is a parameter which depends on the pressure and  $B$  is a constant. We then choose  $\alpha_0$  and  $B$  in order to fit equation (5) with two experimental points (see fig. 13). The values of  $\alpha$  so obtained as a function of  $E_0/p = V/p\delta$  are given in Table I.



TABLE I.

for $p\delta = 8 \text{ cm Hg}\cdot\text{cm}$			
$\alpha = \alpha_0 \exp(-Bp\delta/V)$			
$\alpha_0 = 863 \text{ cm}^{-1}; \quad Bp\delta = 5360 \text{ V}$			
$V$ (volt)	$\alpha$ $\text{cm}^{-1}$	$V$ (volt)	$\alpha$ $\text{cm}^{-1}$
1 800	43	2 900	138
1 900	51	3 000	147
2 000	59	3 100	155
2 100	67	3 200	164
2 200	76	3 300	173
2 300	85	3 400	182
2 400	94	3 500	190
2 500	102	3 600	198
2 600	111	3 700	207
2 700	120	3 800	215
2 800	129	3 900	223

In fig. 12, 13, 14 the theoretical curves are compared with the experiments. The curves given in fig. 12 represent equation (3') for  $\theta = 0^\circ$  and  $\theta = 45^\circ$ . Fig. 13 and 14 refer to equation (5); fig. 13 shows the experimental values obtained from a  $3.5 \times 10 \text{ cm}^2$  counter having a 2 mm gap, fig. 14 a  $2.8 \times 10 \text{ cm}^2$

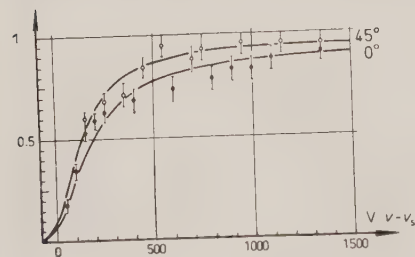


Fig. 12.

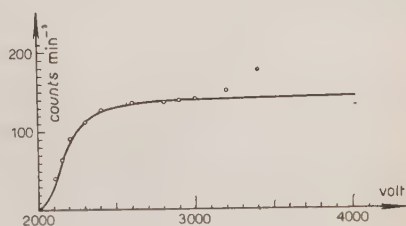


Fig. 13.

counter having a 1.8 mm gap. The values of the constant  $\alpha_0$  and  $B$  have been determined on two points of fig. 13, and the same values have been used for all the other numerical calculations given in this paper.

The «characteristics» have been obtained by counting cosmic ray particles, which have different ionizing power. We reckon that no serious error is introduced if we take for  $\bar{\nu}_0$  the average value as obtained from other experiments in cosmic rays at sea level. For our case we set then  $\bar{\nu}_0 = 20$  ion pairs  $\text{cm}^{-1}$ .

The agreement between theory and experiments is surprisingly good. But not too much emphasis should be given to it because so many parameters are unknown (or known only as an order of magnitude). All we claim is that

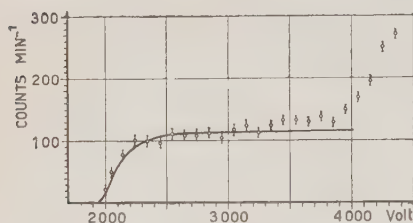


Fig. 14.

the theory is consistent the experiments. In both cases shown in fig. 13 and 14 the experimental points agree with the theory up to a certain value of  $V$ . But for high over voltages the experimental characteristics rise above the theoretical values, gradually at first and then very quickly. As pointed out in § 2-I, we regard this effect as due to impurities: this view seems to receive support from the fact that while the first part of the experimental characteristic is re-

producible, the rise above the plateau is not: it varies quite considerably from one counter to another and it depends also on the length of the quenching pulse. Therefore we shall not discuss it here.

#### 4. - Definition of threshold.

The value of  $R$  or  $N$  as given by equations (3'), (4) and (5) is never zero, although it becomes negligible when the field drops below a certain value. This makes the definition of threshold rather arbitrary.

Following a criterion already established in the current literature we define the *threshold potential*  $V_c$  as the value of  $V$  which satisfies the following equation:

$$(6) \quad \frac{4}{3} \frac{\epsilon x c^{\alpha \delta}}{r} = k \frac{V_c}{\delta},$$

where the symbols have the same meaning as in the previous paragraphs. The physical significance of this equation is clear:  $\alpha c^{\alpha \delta} / \pi r^2$  is the *average* ion density reached in the avalanche after travelling a distance  $\delta$ . The left hand side of (6) is the field associated with this space charge. (6) is then Meek's limiting condition for the development of a spark <sup>(8)</sup>.

<sup>(8)</sup> In the same way, that is by neglecting statistical fluctuations in the development of a spark, one could calculate approximately the «efficiency» of the counter.

For a given voltage  $V$  the equation

$$(7) \quad \frac{4}{3} \frac{\epsilon \alpha c^{\alpha z_c}}{r} = k \frac{V}{\delta},$$

defines a critical length  $z_c$  which the avalanche has to go through before producing a space charge sufficient to satisfy Meek's criterion. If a primary ionizing particle produces ions only within a distance  $z < z_c$  from the anode, then this particle will not give rise to a spark. At least one ion must be produced between  $z = 0$  and  $z = \delta - z_c$ .

### 5. - Dependence of the efficiency on $\delta$ .

Equation (3) can be used now to discuss some properties of this type of counter. As the use of this equation would require elaborate calculation we shall make use here of (3') although, especially near the threshold, it is not very accurate. From (3'), we get

$$(8) \quad \frac{\cos \theta \ln(1-R)}{\bar{v}_0} = -\delta + z_c(V, \delta),$$

The left hand side of this equation is independent either of  $V$  or of  $\delta$ , while the right hand side depends on both. The function  $z_c$  is defined by eq. (7)

$$z_c = \frac{e^{B_p \delta / V}}{\alpha_0} \left( \ln A + \ln V + \frac{B_p \delta}{V} \right).$$

By simple graphical methods eq. (8) can be solved for any value of  $R$ ; the curves for  $\theta = 0$  are plotted in fig. 15. The threshold curve is compared with experimental results; they agree within the experimental errors and the accuracy to be expected from the method of calculation.

The main features of these curves are:

1) Each curve, corresponding to a certain value of the parameter  $R$ , has a minimum, except the case  $R = 0$ . This means that for counters which

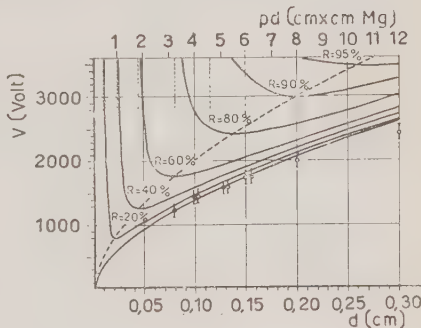


Fig. 15.

The probability that this happen is

$$(3'') \quad R'(\theta, \bar{v}_0) = 1 - \exp \left[ -\frac{\bar{v}_0}{\cos \theta} (\delta - z_c) \right],$$

the symbols having the same meaning as in the previous paragraph.

(3'') is analogous to (3'). For  $\delta = z_c$   $R = 0$ ; this is not strictly true because even if  $z_c > \delta$  there still is a probability, as we have seen in § 2-II, that an avalanche might develop into a spark.

For large overvoltages, when  $R$  and  $R'$  approach 1 the difference between (3') and (3'') decreases. In fact, for large overvoltages, as  $\alpha$  increases,  $e^{-\alpha \delta}$  decreases very rapidly while  $n$  varies only slightly. Therefore  $\lambda$  decreases as  $\sim e^{-\alpha \delta}$ . For  $\lambda$  sufficiently small,  $-Ei(-\lambda) \cong \ln 1/\gamma \lambda$ ,  $\gamma$  being Euler's constant ( $\gamma = 1.78...$ ). Then (3) becomes

$$R'(V, \theta, \bar{v}_0) \cong 1 - \exp \left[ -\frac{\bar{v}_0}{\alpha \cos \theta} \left( \ln \frac{1}{\gamma} - \ln n + \alpha \delta \right) \right] = 1 - \exp \left[ -\frac{\bar{v}_0}{\cos \theta} (\delta - z_c) \right] \cdot f.$$

since  $n = e^{\alpha z_c}$ . The factor  $f$ , is then  $= \gamma^{\bar{v}_0 / \alpha \cos \theta}$ . When  $V - V_s \cong 500$  V,  $\bar{v}_0 / \alpha \sim 1/4$ . Therefore  $f \cong 1$ . Then (3') almost coincides with (3'').

are to have a given efficiency  $R(\theta, \bar{\nu}_0)$  there exists a value of  $\delta$  at which the counter attains this efficiency at the minimum possible voltage. For the mixture of gases corresponding to our case,  $\theta=0$ ,  $\bar{\nu}_0=20 \text{ cm}^{-1}$  and  $\delta=0.2 \text{ cm}$  we have an efficiency of 90% at the minimum possible voltage.

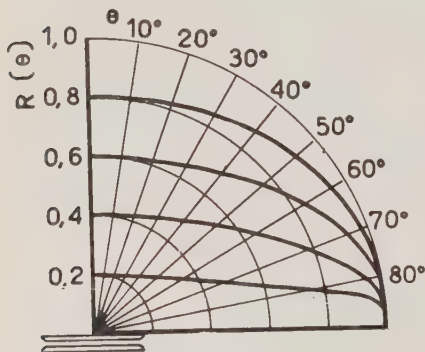


Fig. 16.

$R = 0.5$  for  $\theta = 70^\circ$ ;  $R = 0.75$ , for  $\theta = 80^\circ$  and practically  $R = 1$  for  $\theta = 86^\circ$ . If a telescope of counters is made, varying the angles of the planes of the counters with the axis of the telescope, the efficiency of the telescope can be adjusted to any required value. As a function of  $\bar{\nu}_0$ ,  $R$  can be adjusted to record practically only particles having an ionizing power above a certain value.

2) For any value of  $\delta$  there exists a maximum value of the efficiency which is attainable. For instance, for  $\delta = 0.05 \text{ cm}$  the maximum value of  $R(\theta=0; \bar{\nu}_0=20 \text{ cm}^{-1})$  attainable with any voltage is about 61%. Of course this maximum value depends on the values of  $\theta$  and  $\bar{\nu}_0$ . Maintaining  $\bar{\nu}_0 = 20 \text{ cm}^{-1}$ , we have plotted in fig. 16 the variation of the efficiency with  $\theta$ . The angle  $\theta=0$  corresponds to a particle incident normally on the counter.

So, a counter which has an efficiency of  $R = 0.20$  for  $\theta = 0$ , has

## 6. - Influence on the characteristic of a slight apaparelism between the electrodes. Slope of the plateau.

In practice the slope of the plateau of a plane parallel counter is greater than that predicted by the theory (which is very small). In many cases the characteristic has a flat plateau for 1000 V or more (according to the quenching time, see § 2-I); after that the slope increases gradually till eventually the end of the plateau is marked by a very steep rise which has been attributed to impurities in the gas or on the surface of the electrodes.

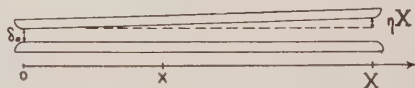


Fig. 17.

Sometimes, however, a definite slope has been observed right from the beginning of the plateau and more or less constant for a large interval. We thought this might be due to a slight apaparelism between the electrodes.

Let  $\delta = \delta_0 + \eta x$  be the distance at a point  $x$  in the counter (see fig. 17), and  $X$  be the length of the electrodes. If  $\eta$  is sufficiently small the efficiency

of a surface element at a coordinate  $x$  from the origin can be expressed by

$$R(\theta, \bar{v}_0, x) = R(\theta, \bar{v}_0, 0) + \eta x \frac{\partial R}{\partial \delta},$$

Integrating over all the surface and all values of  $\theta$ , one can easily get

$$(9) \quad R_{ap} = R_p + S = R_p \left( 1 + \frac{S}{R_p} \right).$$

$R_{ap}$  represents the efficiency of an «apara-parallel» counter,  $R_p$  that of a parallel one. For an isotropic angular distribution of particles of uniform ionizing power the function  $S$  can be found to be

$$S = -\frac{\eta X \bar{v}_0}{2\alpha} \left[ e^{-\lambda} \left( \frac{B}{V} (1 + \alpha\delta) - \alpha \right) - \frac{B}{V} (-Ei(-\lambda)) \right] (-Ei(-a)),$$

the notation being the same as in the previous paragraphs. In fig. 18 we have plotted eq. (9) for a value of  $\eta x = 0.1\delta_0$ . In practice the «apara-parallelism» was certainly smaller than this.

On the other hand one can see that the effect on the characteristic is quite appreciable near the threshold but negligible at about 500 V of overvoltage. We conclude therefore that the constant slope observed on certain plateaux cannot be attributed entirely to this effect but is most likely to be a combined result of geometrical imperfections and impurities.

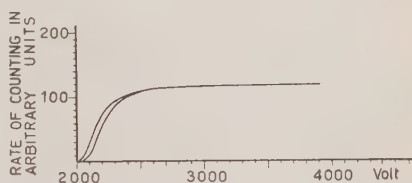


Fig. 18.

## 7. - Uncertainty in the determination of the coordinates of an event. Multiple sparks.

From what we have already discussed in § 2-II it follows that an ionizing particle crossing the counter at an angle  $\theta$  can generate sparks within a circular region having the radius  $\Delta x = \delta \operatorname{tg} \theta$ . However the probability of creating a spark is far higher for ions lying near the cathode than for those near the anode. The probability function can immediately be obtained from the equation given in § 2-II.

Knowing that function we can get the answer to the following question: if a spark is observed at a point  $x$  what is the probability that the particle coming at an angle  $\theta$  has crossed the plane of the cathode at a point  $x + \Delta x$ ?  $\Delta x$  will give us the uncertainty in the determination of an event.

For our purpose, an order of magnitude of the uncertainty can be very simply obtained considering the critical length  $z_c$  as defined in § 4-II (foot-note <sup>(8)</sup>). This defines an interval  $z = 0, z = \delta - z_c$  which is the sensitive



region of the counter. Only those ions which are created in that region can give rise to a spark. Therefore, for a particle coming at an angle  $\theta$ ,  $\Delta x \cong (\delta - z_c) \cdot \operatorname{tg} \theta$ .

The length  $\Delta x$  is then a function of the voltage or, which is the same thing, of the efficiency. Table II gives some values of  $\Delta x$  calculated in this way, as a function of the overvoltage  $V - V_s$ , for particles coming at an angle  $\theta = 45^\circ$  ( $\operatorname{tg} \theta = 1$ ).

TABLE II.

$V - V_s$	$\Delta x$ (cm)
100 V	.06
200	.095
300	.115
400	.130
500	.150

We have so far considered only the case of a particle producing a single spark. In § 2-II, on the other hand, we have considered in the same way a particle producing any finite number of sparks. It might be interesting to estimate the probability that a particle produces a certain fixed number of sparks.

We have first to consider whether sparks created at the same time within a small region can develop in an entirely independent way. If there is no mutual interaction the calculation is easy; but in this case the theoretical results predict at comparatively low overvoltages many more multiple sparks than are in fact observed.

At  $V - V_s = 500$  V, for instance, there should be, according to the theory, almost as many double sparks as single sparks. A careful measurement of the relative frequency of the multiple sparks has not been made, but it is certain that there is no agreement, on this point, between the theory and the experiments.

We have then tentatively assumed that two avalanches created at the same time can develop into two separate sparks only if separated by a distance  $l$  from one another. In this case the probability of creating any number of sparks for an ionizing particle depends also on  $\theta$ . The calculation, which is rather long and tedious, has been carried out numerically only for  $l = 0.4$  and  $0.8$  mm. The results seems to agree better with the former value. We shall not discuss this point any further as the theory as a whole is not proved.

It must be pointed out, that the conclusion which we have just drawn is contradictory with the assumption made in § 2-II. We assumed there that in any case two avalanches can develop into sparks in an independent way. We believe, however, that the results obtained there are valid in any case because we have calculated there the probability that  $\nu$  avalanches give rise to at least one spark. For small overvoltages multiple sparks are rare. For greater overvoltages the efficiency is already very near 1 and the result cannot be seriously affected.

**Acknowledgements.**

The authors wish to thank Prof. E. AMALDI and B. FERRETTI for helpful and stimulating discussions; Dr. GROSS of the Istituto Nazionale del Calcolo C.N.R. for the help and advice given in carrying out the calculations, Prof. R. CIALDEA for the preparation of the transparent electrodes, Mrs. D. W. LEE and Mr. E. ZATTONI for assistance given in the construction of the counters.

---

**RIASSUNTO**

Si riferisce una serie di esperimenti eseguiti allo scopo di esaminare le principali caratteristiche dei contatori a scintillazione. Nella Parte I si danno dettagli costruttivi e si presentano i risultati sperimentali. Nella Parte II si discutono i risultati ottenuti.

# LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

## Possible Example of a New Mode of Disintegration of the neutral $\pi$ -Meson.

S. GOLDSACK (\*), M. SCHÖNBERG (\*\*) and G. VANDERHAEGHE

*Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences Appliquées  
Université Libre de Bruxelles*

((ricevuto il 5 Agosto 1953))

An unusual event, shown in fig. 1, was found in a plate of Ilford G5 emulsion 1200 micron thick, exposed at 2000 metres. The event might otherwise have passed for a normal  $\pi$ - $\mu$  decay, but appears to be accompanied by the emission of an electron

Track (1) is  $1785 \pm 100$  micron long and ends in the emulsion at *A*; grain counting shows that the particle went towards *A*. Measurements of scattering as a function of range give a mass  $1.12 \pm 0.2$  times that of the  $\pi$ -meson. The appearance of the end of the track suggests that the particle was not quite at rest when the event occurred, but the measurements show that its residual energy, if it is a  $\pi$ -meson, was not more than 3.0 MeV.

Track (2) is  $710 \pm 70$  micron long and ends in the emulsion at *C*. Over most of its length it is almost perpendicular to the surface of the plate, so that scattering measurements are difficult. They have been made by projecting the track on two perpendicular ver-

tical planes, and the results are consistent with the assumption that the particle was a  $\pi$  or a  $\mu$ -meson.

In view of these measurements it seems most reasonable to assume that track (1) is that of a  $\pi$ -meson and track (2) is that of a  $\mu$ -meson. There is no visible electron emitted from the end of track (2), which suggests that the  $\mu$ -meson was negative.

Track (3) dips at about  $30^\circ$ . Its projected length is 1.3 mm. After correcting for distortion and for the effect of dip, the measurements of scattering give  $p\beta = 38 \pm 7$  MeV (the error quoted is only the statistical standard error). The grain density of the track is found to be  $0.88 \pm 0.07$  times the minimum for the plate. So that the track can be identified as that of an electron, whose total energy was  $38.5 \pm 7$  MeV.

The angle between tracks 2 and 3 at *A* is  $20^\circ \pm 3^\circ$ .

A possible simple explanation of this event is the following: a charged  $\pi$ -meson is scattered by a nucleus, with charge exchange, and becomes a neutral  $\pi$ -meson, which disintegrates in flight into an electron and a  $\mu$ -meson.

The total energy of the  $\pi$ -meson at

---

(\*) Now at the University of Manchester.

(\*\*) Now at the University of São-Paulo.

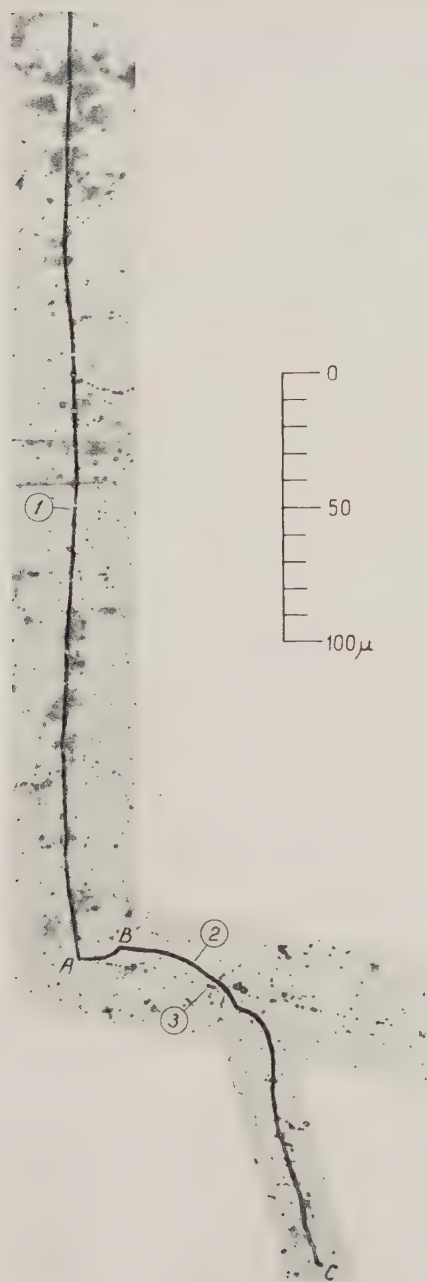


Fig. 1





the end of its track is  $142 \pm 2.5$  MeV (taking for the rest mass  $140.5 \pm 2.0$  MeV). The total energy of the  $\mu$ -meson at its origin is deduced from the range to be  $111.6 \pm 2$  (taking for the rest mass  $107 \pm 2$  MeV). The application of the conservation laws of energy and momentum to the secondaries gives for the hypothetical intermediate particle a rest-mass energy of  $133.4 \pm 5.3$  MeV and a kinetic energy of  $14 \pm 8.3$  MeV. The energy balance between the primary  $\pi$ -meson and the secondaries cannot be established accurately, because the energy transmitted to the nucleus is not known. It seems reasonable, however, to assume that this energy is small and may be neglected. So, we get for the total energy of the secondaries  $150 \pm 8.5$  MeV (rest-masses included), which value is consistent with that of the total energy  $142.5 \pm 2.5$  MeV of the  $\pi$ -meson at the end of its track. There are several possible nuclei in the emulsion which could absorb a negative charge without giving

rise to visible secondary particles.

Since this is the only event of its kind which has been observed, we cannot rule out the possibility that it is an accidental coincidence of some type. The most likely explanation along these lines is that the event is a normal  $\pi$ - $\mu$  decay and that the electron is unassociated (in this case we would probably believe the point  $B$  to be the end of the  $\pi$ -meson track, as there is a very large deviation at  $B$ , and the section  $AB$  could well be the end of the  $\pi$ ). We estimate a chance of  $10^{-3}$  for an electron between 10 and 100 MeV to pass within one micron of a given point in the emulsion, but the chance of a disappearance in flight at the given point must be much smaller. We have examined carefully the region several hundred microns beyond the event, but we cannot identify a continuation of the track (3). The emulsion is nevertheless quite sensitive, and other tracks at minimum ionisation can be followed through the region.

## Un mesone K uscente da stella.

M. BALDO e B. SECHI

*Istituto di Fisica dell'Università - Padova*  
*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova*

(ricevuto il 2 Settembre 1953)

Un mesone pesante uscente da stella e che decade in fine range, è stato osservato in una lastra nucleare Ilford G5,

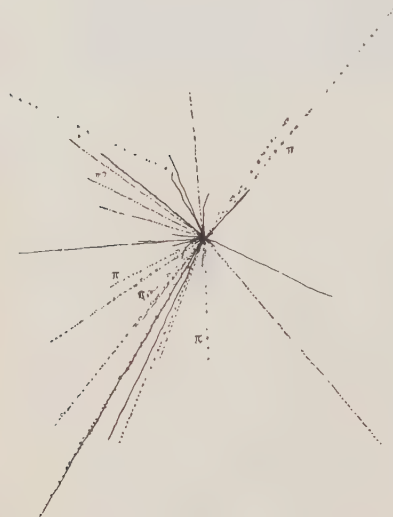


Fig. 1.

spessore 600 micron, esposta a 27000 m di altitudine in uno dei voli effettuati in Sardegna durante l'estate del 1952.

La stella (fig. 1) è costituita da 16 rami neri, 13 grigi e 4 al minimo, ed è

da considerarsi generata da un neutrone, dato che nessun ramo ionizzante possiede tutti i requisiti per essere un primario. Il mesone ha una lunghezza di 297 micron, e dalle misure di gap-range si è ricavato per la sua massa un valore più prossimo a quello del protone che a quello del mesone. La traccia prodotta dalla particella di decadimento, che attraversa la lastra per 600 micron uscendo in vetro, ha una ionizzazione di  $1,05 \pm \pm 0,05$  volte il minimo ed un valore di  $p\beta$  di  $158 \pm 53$  MeV/c. Malgrado la poca precisione delle misure dovuta alla brevità delle tracce, i risultati lasciano pensare, quale soluzione più probabile, che si tratti dell'emissione di un mesone K del tipo di quelli osservati a Milano <sup>(1)</sup>, Oslo <sup>(2)</sup>, e Parigi <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> R. LEVI SETTI, G. TOMASINI: *Nuovo Cimento*, **9**, 1244 (1952); A. BONETTI, R. LEVI SETTI, M. PANETTI, G. TOMASINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 345 (1953) e comunicazione al Congresso di Londra (1953).

<sup>(2)</sup> N. ISACHSEN, V. VANGEN e S. O. SÖRENSEN: *Phil. Mag.*, **44**, 224 (1953).

<sup>(3)</sup> J. CRUSSARD, MABBOUX, MORELLET, A. ORKIN-LECOURTOIS et TREMBLEY: *Comptes Rendus* **234**, 84 (1952); J. CRUSSARD, L. LEPRINCE-RINGUET, MORELLET, A. ORKIN-LECOURTOIS et TREMBLEY: *Comptes Rendus*, **236**, 872 (1953).

Questo K presenta però, rispetto agli altri finora noti, la particolarità di una energia di emissione assai piccola. Infatti dalla relazione range-energia ( $m_K = 1000 m_e$ ) si ricava per essa un valore di 5,3 MeV, mentre la barriera di po-

stella per vedere se qualche altra spiegazione risultasse ugualmente possibile.

In genere le considerazioni basate sulla barriera di potenziale presuppongono un nucleo statico in equilibrio; ora è difficile pensare che tale condi-

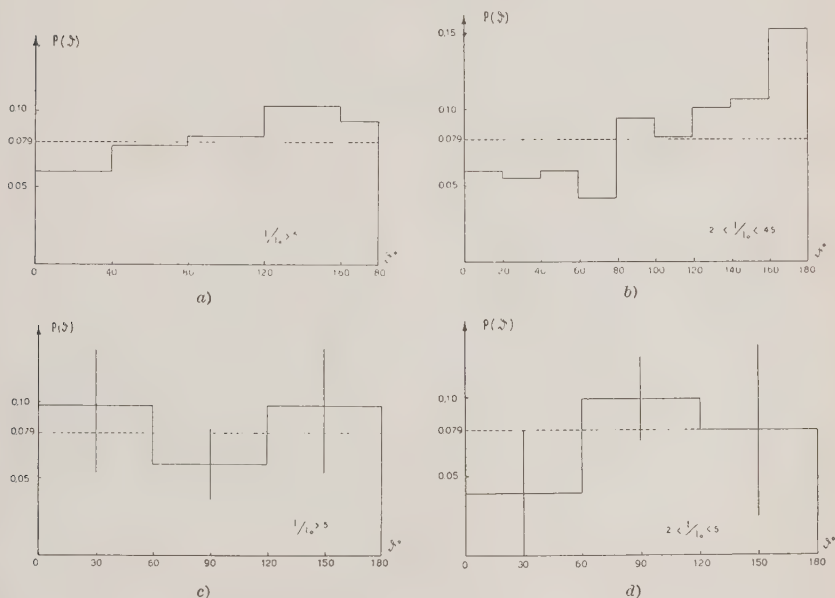


Fig. 2. - a) e b): distribuzioni angolari  $P(\theta)$  per steradiante e ramo ( $\theta$  angolo nello spazio rispetto al primario) dei rami neri e grigi nelle stelle di media energia; c) e d): distribuzioni angolari  $P(\theta)$  per steradiante e ramo ( $\theta$  angolo nello spazio rispetto alla verticale) dei rami neri e grigi della stella del K.

tenziale Coulombiano per la stella, che, dato il numero di rami ionizzanti (33, dei quali 4 dovuti ad alfa ed uno ad un frammento più pesante), si deve considerare dovuta alla disintegrazione di un nucleo pesante dell'emulsione, è di circa 9 MeV; e questa bassa energia di emissione potrebbe spiegarsi a prima vista, attribuendo al K una carica negativa, ciò che sarebbe di notevole interesse nei riguardi del problema generale della interazione delle particelle pesanti negative con i nuclei. È parso quindi interessante studiare dettagliatamente la

zione possa essere verificata durante una disintegrazione il cui risultato consiste nella distruzione più o meno completa del nucleo considerato. Sarà opportuno considerare la barriera come variabile nel corso del processo, e cercare di vedere se essa sussiste ancora al momento dell'emissione della particella pesante.

Il bilancio energetico ottenuto dalla misura dell'energia di ciascun ramo visibile della stella, più una debita aggiunta per i rami neutri, risulta di circa 9 GeV. Per tale energia del primario e nell'ipotesi che i  $\pi$  vengano emessi

in un solo atto, l'angolo medio del cono che li contiene dovrebbe essere di  $24^\circ$ . La distribuzione angolare dei 4 o forse 5 mesoni  $\pi$  della nostra stella mostra invece che essi devono avere avuto delle interazioni secondarie alle quali devono essere dovuti in parte i rami neri e grigi. Questa ipotesi sembra convalidata da calcoli in corso, in questo laboratorio, sullo scattering e riassorbimento di mesoni nel nucleo con il metodo di Monte Carlo (<sup>4</sup>). Secondo tali dati il numero medio di nucleoni di rinculo nello scattering e quello provocato dal riassorbimento dovrebbe essere pienamente sufficiente per spiegare il numero dei rami neri e grigi osservati; inoltre in tal caso la distribuzione angolare dei rami dovrebbe essere prossima all'isotropia. Questo verrebbe sperimentalmente confermato dalla fig. 2, che permette di confrontare la distribuzione dei rami grigi e neri della stella con quella che risulta per stelle di energia inferiore alla soglia per produzione di mesoni (500-1000 MeV) ottenuta in questo laboratorio (<sup>5</sup>). Si vede che la collimazione dei rami verso l'avanti, dovuta al mec-

canismo della cascata nucleonica nel nucleo, è quasi interamente mascherata ad energie più elevate da quelle che si possono presumere siano le azioni secondarie dei mesoni. Secondo tale ipotesi il tempo necessario per la distruzione di un nucleo sarebbe:

$$\frac{3,65 \cdot 10^{-13}}{0,95 \cdot 3 \cdot 10^{10}} \cong 1,3 \cdot 10^{-23}$$

$3,65 \cdot 10^{-13}$  cm = cammino medio dei mesoni nel nucleo (<sup>1</sup>)

$0,95 = \beta$  dei mesoni.

Mentre il tempo di emissione della particella K sarebbe:

$$\frac{6 \cdot 10^{-13}}{0,14 \cdot 3 \cdot 10^{10}} \cong 1,4 \cdot 10^{-23}$$

$6 \cdot 10^{-13}$  cm = raggio del nucleo d'argento  
 $0,14 = \beta$  del K.

Queste cifre che hanno un valore puramente indicativo lascerebbero pensare che nel tempo probabile per l'emissione del K il nucleo si trovi già in una fase dinamica di distruzione, che permette di mettere in dubbio la validità dell'applicazione del concetto di barriera di potenziale.

Ringraziamo vivamente il Prof. DALLAPORTA per gli utili consigli ed il costante interessamento.

(<sup>4</sup>) N. DALLAPORTA e G. LANZA: Comunicazione privata.

(<sup>5</sup>) G. BELLIBONI e B. VITALE: *Nuovo Cimento*, 10, 72 (1953).

## Long Range Nuclear Forces.

H. C. CORBEN

*Carnegie Institute of Technology - Pittsburgh, Pa. U.S.A.*

(ricevuto il 3 Settembre 1953)

The accompanying fourth-order diagrams represent consequences of the Fermi theory of  $\beta$ -decay that owing to the non-renormalizability of this type of interaction do not appear to have been computed. In fourth order the effective coupling constant is very small, but since in these particular processes neutrinos are exchanged the range of the corresponding force is very large. Indeed in the static case one would expect an effective potential  $\sim r^{-1}$  if the neutrino has zero rest-mass, and in this case a simple dimensional argument shows that  $V(r) \sim (g^4/r)(m^3 c^5/\hbar^{11})$  ( $m$  = electron mass) where  $g$  is the Fermi coupling constant ( $\sim 2 \times 10^{-49}$  erg cm<sup>3</sup>).

This expression is of the order of  $10^{-11}$  times the gravitational potential between two nucleons, and hence of the order of  $10^{-5}$  times the gravitational potential between two electrons. Large numerical factors (particularly powers of  $M/m$  where  $M$  is the nucleon mass) which are neglected here could of course greatly modify these ratios.

Unlike the two-neutrino exchange process postulated by GAMOW and TELLER<sup>(1)</sup> as a possible explanation of

gravitational forces, the processes discussed here are a direct consequence of the usual Fermi theory of  $\beta$ -decay.

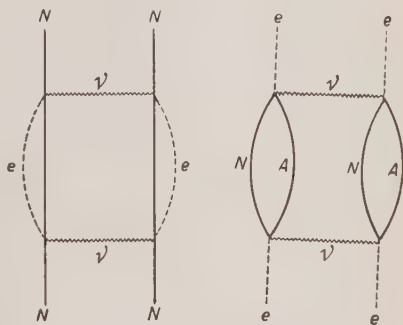


Fig. 1.

$N$  = nucleon, ———  
 $e$  = electron, - - - -  
 $\nu$  = neutrino, ~~~~~  
 $\bar{A}$  = antineutrino, ·····

One may even enquire if these fourth order terms, which are charge independent, could afford a description of gravitational phenomena. Whether or not this is the case, the fact remains that if the magnitude of this interaction were to exceed that of gravity, we should be faced with a contradiction between Fermi theory and macroscopic experience. Detailed computations of these forces are therefore being performed.

(<sup>1</sup>) G. GAMOW and E. TELLER: *Phys. Rev.*, **51**, 289 (1937); G. GAMOW: *Phys. Rev.*, **71**, 550 (1947).



## Processi del quart'ordine dell'interazione alla Fermi.

P. BUDINI

*Istituto di Fisica dell'Università - Trieste**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova*

(ricevuto il 4 Settembre 1953)

Gli elementi di matrice di processi del quart'ordine tra particelle di Fermi-Dirac quali quelli proposti nella precedente lettera da H. C. CORBEN <sup>(1)</sup> possono venir resi convergenti mediante la introduzione di una non localizzabilità dell'interazione, sul modello di quanto esposto in un precedente lavoro <sup>(2)</sup> (nel seguito indicato con I). Se in particolare si assume per la trasformata di Fourier del fattore di forma un'espressione del tipo:

$$(1) \quad G(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{m^4}{m^4 + \Pi^4}$$

con

$$(2) \quad \Pi^4 = m^4 \left( \frac{q_1 - q_2}{2} \right)^2 \left( \frac{q_3 - q_4}{2} \right)^2 \cdot \\ \cdot (q_1 + q_2)^2 (q_3 + q_4)^2,$$

(cfr. form. (17) e (23) di I) si ottiene che accanto ai processi con scambio di due neutrini proposti da H. C. CORBEN <sup>(1)</sup> anche i processi descritti dai

grafici della fig. 1 danno luogo a forze a lungo raggio d'azione tra le particelle interagenti. Abbiamo tracciato i soli grafici di due delle possibili interazioni elettrone-neutrone e neutrone-neutrone, ma si può facilmente vedere come, basandosi sui soli processi  $\beta$  accertati, si possono costruire interazioni a lungo raggio d'azione del tipo descritto tra qualsiasi coppia di particelle di Fermi-Dirac. Si ottiene che gli elementi di matrice di questi processi, quando l'impulso trasferito è piccolo, non dipendono dal particolare tipo delle particelle di Fermi-Dirac interagenti, ma solo dall'estensione della regione di non localizzabilità, da costanti universali e, naturalmente, dagli stati finali e iniziali delle particelle. Si trova così che, al limite statico, tra due qualsiasi particelle di Fermi-Dirac, indipendentemente dalla loro carica e massa, dovrebbe agire una forza di potenziale (formalmente simile a quella prevista con argomenti dimensionali da H. C. CORBEN <sup>(1)</sup>):

$$(3) \quad V(r) \approx - \frac{g^4 c^5 m^8}{64 \pi^5 \hbar^{11} r},$$

dove  $m$  determina, tramite la (1), l'estensione della regione di non localizzabilità,

<sup>(1)</sup> H. C. CORBEN: *Nuovo Cimento*, **10**, (1953).

<sup>(2)</sup> P. BUDINI: *Nuovo Cimento*, **10**, (1953).

e  $g = 2 \cdot 10^{-49}$  erg cm<sup>3</sup>, è la costante d'interazione di Fermi. Se si pone  $m = 27$  masse elettroniche ( $\hbar/mc = 1,4 \cdot 10^{-12}$  cm) la (3) prevede che tra due nucleoni dovrebbe agire una forza della stessa intensità di quella gravitazionale (\*).

Vogliamo ora esaminare più da vicino la possibilità, già prospettata da H. C. CORBEN (1), di interpretare con questi processi i fenomeni gravitazionali. Secondo la teoria relativistica della gravità, il quanto gravitazionale dovrebbe avere spin = 2 (3), inoltre la forza di gravità dovrebbe esercitarsi tra tutti i tipi di particelle.

Si ottiene lo spin due per il quanto gravitazionale se si ammette che l'interazione fondamentale dei processi considerati sia pseudo-scalare o pseudo-vettoriale. In tal caso infatti, per la conservazione della parità e del momento angolare, le particelle interagenti in ogni singola transizione dallo stato reale allo stato virtuale e viceversa, devono invertire lo spin, mentre la coppia delle particelle virtuali scambiate deve essere emessa (assorbita) in uno stato  $p$  a spin antiparalleli, nel caso pseudoscalare, in uno stato  $s$  a spin paralleli nel caso pseudovettoriale. In ambedue i casi i momenti angolari delle due coppie di particelle scambiate devono essere paralleli; il che comporta lo spin due per l'equivalente quanto gravitazionale (il caso pseudovettoriale è stato schematicamente rappresentato in fig. 1 (a) dove le frecce indicano l'orientazione degli spin delle particelle).

Se si ammette  $m$ , cioè l'estensione

della regione di non localizzabilità, indipendente dalla massa delle particelle interagenti, la (3) non può naturalmente dare una forza di tipo gravitazionale cioè proporzionale alle masse inerti delle parti-

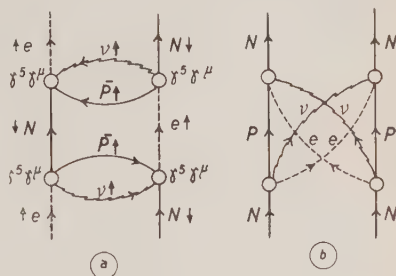


Fig. 1.

celle stesse. D'altra parte una plausibile dipendenza di  $m$  dalle masse delle particelle interagenti è difficilmente determinabile a priori, allo stato attuale della teoria. È interessante tuttavia osservare che se nell'attuale, e certamente non definitiva, impostazione matematica della teoria si pone:

$$(4) \quad m^4 = m_0^3 \sqrt{m_1 m_2},$$

con  $m_0$  costante e  $m_1 m_2$  masse delle particelle interagenti, la (3) si può scrivere:

$$(5) \quad V(r) = -K \frac{m_1 m_2}{r},$$

con:

$$K = \frac{g^4 c^6 m_0^6}{64 \pi^6 \hbar^{11}} \approx 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ (cm}^3 \text{ s}^{-1} \text{ g}^{-1})$$

$$\text{se } m_0 \approx 7 m_e.$$

Si ottiene cioè una forza di intensità e di tipo gravitazionale, agente tra tutte le particelle di Fermi-Dirac.

In questo schema di teoria rimarrebbe

(\*) G. WENTZEL: *Quantum theory of fields* p. 207 (New York, 1949).

(\*) È interessante osservare che un valore più grande per  $m$  ( $\hbar/mc < 1,4 \cdot 10^{-12}$  cm) comporterebbe contraddizione tra le conseguenze della teoria del decadimento  $\beta$  e l'esperienza macroscopica come già osservato da H. C. CORBEN (1), mentre un valore più piccolo di  $m$  ( $\hbar/mc > 1,4 \cdot 10^{-12}$  cm) comporterebbe un'estensione della regione di non localizzabilità difficilmente accettabile.

inspiegata l'eventuale azione della gravità sulle particelle di Bose-Einstein. Questa difficoltà potrebbe forse venir superata se si accettasse il punto di vista, più volte proposto, della composizione delle particelle di Bose-Einstein mediante particelle di Fermi-Dirac (naturalmente in tal caso l'estensione della regione di non localizzabilità dovrebbe

dipendere dalla massa della particella composta).

L'autore desidera ringraziare il prof. H. C. CORBEN per interessanti discussioni avute sull'argomento e per avergli gentilmente mandato una copia della precedente lettera <sup>(1)</sup> prima della pubblicazione.

## Sulla ionizzazione e sulla radiazione di Cerenkov.

P. BUDINI

*Istituto di Fisica dell'Università - Trieste*

L. TAFFARA

*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova*

(ricevuto il 5 Settembre 1953)

In un precedente lavoro <sup>(1)</sup> (nel seguito indicato con I) sono state date delle formule generali per il calcolo dell'eccitazione, della ionizzazione e della radiazione di Cerenkov generate dal passaggio di una particella ionizzante di elevata energia in un dato mezzo. L'energia spesa in eccitazione e ionizzazione dirette (cioè non dovute al riassorbimento della radiazione di Cerenkov) (for. (29) e (30) di I) può esser calcolata mediante l'unica formula (il significato dei simboli ove non venga espressamente dato è lo stesso che in I)

$$(1) \quad \left. \frac{dW_{\text{ecc+ion}}}{dx} \right|_{>v_0} = \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \omega \operatorname{Im} \varepsilon \left( \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon| \varepsilon_0^2} - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon \right) d\omega,$$

nella quale si ponga:

$$(2) \quad \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = \frac{4\pi n e^2}{m} \sum_i \frac{f_i g_i \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + g_i^2 \omega^2} + n c \sum_k \sigma_k(\omega),$$

con  $n$  numero di atomi per  $\text{cm}^3$ ,  $f_i$  le « oscillator strength » delle transizioni dallo stato fondamentale agli stati eccitati e  $\sigma_k(\omega)$  le sezioni d'urto atomiche per effetto fotoelettrico. Si ottiene la (2) quando nell'ambito della teoria della dispersione di Kramers-Kallmann-Mark, si assuma per  $\varepsilon(\omega)$  l'espressione (\*):

$$(3) \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i g_i \omega} + \frac{2}{\pi} n c \int_0^\infty \sum_k \sigma_k(\omega') \frac{\theta(\omega' - \omega_k)}{\omega'^2 - \omega^2 - i g \omega} d\omega',$$

<sup>(1)</sup> P. BUDINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 236 (1953).

(\*) Mentre questo lavoro era in corso è apparso un articolo di G. N. FOWLER e G. M. D. B. JONES: *Proc. Phys. Soc.*, **66**, 597 (1953), i quali calcolano la perdita di energia per ionizzazione in ossigeno, impiegando per  $\varepsilon(\omega)$  una espressione simile alla (3), ed uno di R. M. STERNHEIMER: *Phys. Rev.*, **91**, 256 (1953) che con formule equivalenti alla (66) di I e alla (3) calcola l'energia mandata dalla particella ionizzante fuori dalla traccia di ionizzazione. Siamo grati a R. M. STERNHEIMER per averci mandato il manoscritto del lavoro prima della pubblicazione.

con

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega < 0 \\ 1 & \text{se } \omega \geq 0. \end{cases}$$

L'energia spesa in radiazione di Cerenkov osservabile a distanza  $\varrho$  dalla traiettoria della particella si ottiene mediante le (66) di I oppure mediante la formula approssimata (praticamente esatta se  $\varrho \gg$  della lunghezza d'onda della radiazione emessa):

$$(4) \quad \left. \frac{dW_{\text{Cer}}}{dx} \right|_{>\varrho} = \frac{e^2}{v^2} \int \exp \left[ -\frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{c \sqrt{\beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) - 1}} \beta \varrho \right] \left( \beta^2 - \frac{1}{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)} \right) \omega d\omega,$$

dove l'integrazione va estesa a tutte le frequenze per le quali  $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) \beta^2 > 1$ .

La prima sommatoria nella (2) e nella (3) è dovuta allo spettro di assorbimento di righe del mezzo. Il suo contributo alla (1) dà l'energia spesa in eccitazione diretta degli atomi del mezzo; questa energia presenterà un aumento relativistico oppure no a seconda del valore dei rapporti: larghezza delle righe di assorbimento/densità del mezzo, conformemente a quanto discusso in I; se questa energia di eccitazione diretta non presenta aumento relativistico (righe strette e grande densità) allora si avrà un aumento relativistico della radiazione di Cerenkov emessa. Si ottiene precisamente che la somma dell'energia spesa a distanza maggiore di  $\varrho_0$  (delle dimensioni atomiche) in eccitazione e in radiazione di Cerenkov (la (1) col primo termine della (2) + la (4) nella quale si ponga  $= 1$  l'esponenziale) sarà data a meno di quantità trascurabili da formule del tipo di quelle di O. HALPERN e H. HALL <sup>(2)</sup> nelle quali però si dovrà porre:

$$(5) \quad \frac{1}{Z} \sum_i f_i = \alpha < 1,$$

(anziché  $= 1$ ) dato che le  $f_i$  si riferiscono ai soli salti quantici dello spettro di assorbimento di righe. Si può mostrare che  $\alpha$  darà una misura della frazione dell'aumento relativistico della perdita totale di energia dovuto all'eccitazione degli atomi del mezzo-radiazione di Cerenkov; cosicchè in generale gli elementi leggeri (relativamente grandi valori di  $\alpha$ ) saranno più adatti che non i pesanti all'emissione della radiazione di Cerenkov alle energie relativistiche estreme della particella ionizzante, così per esempio nell'idrogeno più della metà ( $\alpha = 0,564$ ) dell'energia spesa nell'aumento relativistico della perdita di energia totale in urti larghi contribuisce alla formazione della radiazione di Cerenkov. Quanta parte della radiazione di Cerenkov emessa potrà poi venir osservata in un dato dispositivo sperimentale dipenderà dal valore dell'esponenziale nella (4').

Il contributo della seconda sommatoria della (2) alla (1) rappresenta l'energia spesa in ionizzazione diretta; essa presenterà sempre aumento relativistico e la densità del mezzo determinerà solo l'ammontare dell'aumento relativistico massimo (di saturazione). La ionizzazione diretta sarà in generale la sola responsabile

<sup>(2)</sup> O. HALPERN e H. HALL: *Phys. Rev.*, **73**, 477 (1948).



dell'aumento relativistico del numero di granuli o goccioline osservato nelle tracce; infatti la ionizzazione indiretta, cioè dovuta al riassorbimento della radiazione di Cerenkov, si formerà per la massima parte lontano dalla traccia di ionizzazione e per di più il suo ammontare complessivo sarà in generale trascurabile (per esempio nel caso dell'idrogeno essa è nulla).

Formule come la (1) e la (3) così come quelle di Fermi, Wick, Halpern e Hall ecc. si riferiscono all'energia perduta dalla particella ionizzante. Tali formule sogliono venir confrontate con i dati sperimentali sulle tracce di ionizzazione nelle emulsioni e in camera di Wilson; esse tuttavia non sono le più adatte a questo scopo dato che per passare dall'energia perduta al numero di ioni è necessario conoscere l'energia media spesa per ione e il taglio da dare alla massima energia trasferita negli urti stretti. I valori teorici di queste energie sono difficilmente determinabili a priori di modo che usualmente essi vengono introdotti nella teoria in modo piuttosto arbitrario e acquistano il significato di parametri di normalizzazione ai dati sperimentali. Si comprende come, in tali circostanze un confronto tra teoria ed esperienza diventi povero di significato. Per il confronto con l'esperienza sarà quindi molto più ragionevole servirsi della formula:

$$(1') \quad \left. \frac{dN_{\text{ion}}}{dx} \right|_{>\varrho_0} = \frac{e^2 n c}{\pi \hbar v^2} \int_0^\infty |\varepsilon(\omega)|^{-2} \sum_k \sigma_k(\omega) \left[ \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon| \varrho_0^2} - \beta^2 \text{Re} \varepsilon(\omega) \right] \frac{d\omega}{\omega},$$

che dà il numero di ioni primari creati a distanza  $> \varrho_0$  per cm di traccia. Analogamente per la radiazione di Cerenkov sarà spesso utile, p. es. nelle esperienze con fotomoltiplicatori, servirsi della formula:

$$(4') \quad \left. \frac{dN_{\text{Cer}}}{dx} \right|_{>\varrho} = \frac{e^2}{\hbar v^2} \int_{\text{Cer}} \exp \left[ - \frac{\omega \text{Im} \varepsilon(\omega)}{c \sqrt{\beta \text{Re} \varepsilon(\omega) - 1}} \beta \varrho \right] \left[ \beta^2 - \frac{1}{\text{Re} \varepsilon(\omega)} \right] d\omega,$$

con

$$\text{Re} \varepsilon(\omega) \beta^2 < 1,$$

che dà il numero di fotoni Cerenkov mandati a distanza  $> \varrho$  per cm di traccia.

Abbiamo applicato le precedenti formule al caso dell'idrogeno assumendo per  $\sigma(\omega)$  l'espressione teorica di BETHE <sup>(3)</sup> e per le  $f_i$  i valori quantistici <sup>(4)</sup>. In tal caso la relazione di completezza

$$(6) \quad \sum f_i + \frac{mc}{2\pi^2 e^2} \int_{\omega_0}^\infty \sigma(\omega) d\omega = 1,$$

è soddisfatta come deve essere. Inserita l'espressione esplicita di  $\sigma(\omega)$  nella (1'), eseguita l'integrazione con l'applicazione del teorema della media, aggiunto il contributo degli urti con parametro d'urto  $< \varrho_0$  <sup>(5)</sup> si ottiene per la ionizzazione speci-

<sup>(3)</sup> H. BETHE: *Handbuch der Physik*, **24**, 518.

<sup>(4)</sup> LANDOLT-BÖRNSTEIN, I, **1**, 256 (Berlin, 1951).

<sup>(5)</sup> P. BUDINI: *Nuovo Cimento*, **7**, 835 (1950).

fica primaria in idrogeno l'espressione:

$$(7) \quad \frac{dI}{dx} = \frac{2\pi z^2 e^4 n}{mv^2 \hbar \omega_0} 0,285 \left[ \log \frac{2mv^2}{\hbar \omega_0 |1 - \beta^2 \varepsilon(\bar{\omega})|} + 3,04 - \beta^2 \right],$$

con  $\bar{\omega} = 1,39 \omega_0$  e  $ze$  carica della particella ionizzante. Per  $\varepsilon(\omega) \equiv 1$  la precedente si identifica con la nota formula di BETHE <sup>(3)</sup>.

Il numero di ioni primari per g/cm<sup>2</sup> da aspettarsi secondo la (7) in idrogeno sono stati riportati per tre valori della pressione, in funzione dell'energia della parti-

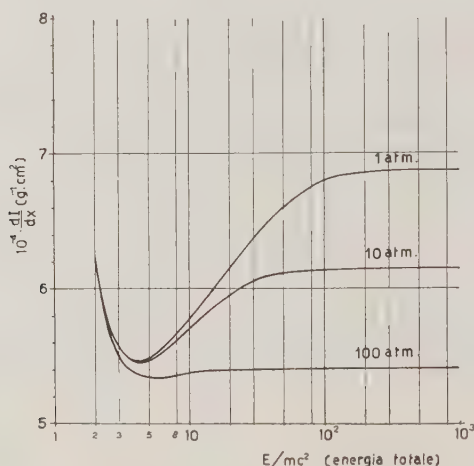


Fig. 1. - Numero di ioni primari per g/cm<sup>2</sup> in H<sub>2</sub> in funzione dell'energia totale di una particella ionizzante secondo la (7).

cella ionizzante ( $z = 1$ ) in fig. 1. Notiamo che tutte le espressioni contenute nella (7) sono determinabili con esattezza e quindi i grafici di fig. 1 hanno significato teorico in valore assoluto.

Analoghi calcoli per la determinazione tramite la (4') dello spettro della radiazione di Cerenkov emessa e osservabile sono in corso di esecuzione.

I dettagli di questi e di ulteriori calcoli verranno esposti in un prossimo lavoro.

## On the Possible Existence of Associated Knock-on Electrons.

A. W. WOLFENDALE

*University of Manchester*

(ricevuto il 7 Settembre 1953)

In a recent counter-hodoscope experiment performed underground by AMALDI *et al.* (1952) <sup>(1)</sup> the frequency of production by  $\mu$ -mesons of two successive electronic secondaries in two layers of lead was found to be higher than that expected if the events were independent. In that experiment a series of layers of lead were placed vertically above one another and below each layer a tray of Geiger counters was situated. The two layers concerned in the analysis were separated by a further layer so that the double electronic secondaries (d.e.s.) could be distinguished from single penetrating secondaries or cascade electron showers. AMALDI *et al.* concluded that the successive production of secondaries in two layers of lead by the same incident particle is not independent and tentatively interpreted the events in terms of the energy dependence of the cross-section for the production of electronic secondaries.

This result is of importance with regard to the conclusions from the counter-hodoscope experiment by LEONTIC and WOLFENDALE (1953). The experimental arrangement used by them consisted of two trays of counters placed one above the other and separated by a lead absorber. Events were recorded

where two counters in the top tray and two in the bottom tray were discharged, the excess of these events over the number expected from the independent production of single electronic secondaries above each tray (d.e.s.) was attributed to penetrating secondaries.

If a large fraction of the d.e.s. were indeed due to dependent events then the conclusions of LEONTIC and WOLFENDALE are invalid. Consequently, the problem has been investigated in more detail.

Now it is known from simple dynamics (ROSSI e GREISEN, 1941) <sup>(2)</sup> that for low secondary energies, the probability of a given secondary energy is little dependent on the energy of the primary particle. If the secondary electron has an energy of more than a few tens of MeV, it will usually discharge more than one counter. In the majority of the electronic secondary events only one counter is discharged adjacent to the counter discharged by the primary meson and thus most of the e.s. events are due to knock-on electrons of energy less than a few tens of MeV. The  $\mu$ -meson primaries for which the probability of production of these low energy electron secondaries depends on primary energy, are confined to energies below about 1 GeV (a  $\mu$ -me-

<sup>(1)</sup> E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI and S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **9**, 969 (1952).

<sup>(2)</sup> B. ROSSI and K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

son of energy 1 GeV has a maximum transferable energy of  $\sim 77$  MeV). Since the number of low energy mesons is small the number of non-independent secondaries should be small.

in the bottom plate have unknown further penetration.

The probability of production of an electron in a single plate,  $\epsilon$  has been found from all the single electron events.

TABLE I.

Experiment	No. of Photos.	$\epsilon$	No. of 2 k.o. events		No. of 3 k.o. events	
			Obs.	Exp.	Obs.	Exp.
Underground 26 m.w.e. 6, 1 cm Pb plates . .	1,103	.048 $\pm .0028$	19	17.7	0	0.8
Sea level 1 m Pb filter 6, 2 cm Pb plates . .	1,458	.0466 $\pm .0026$	22	17.7	2	1.3

Experimentally, some evidence is obtainable from the multiplate cloud chamber. The frequency of knock-on electrons and electron showers produced by  $\mu$ -mesons in the 6 lead plates of the cloud chamber (BRADDICK, NASH and WOLFENDALE, 1951) <sup>(3,4)</sup> has been measured. Most of the knock-on electrons observed in the cloud chamber emerged singly and stopped in the next plate (K.O's) and from considerations of their frequency and angle of emission the author has calculated that the majority of e.s. type events found with counter arrangements, in which the counters are not separated by lead slats, can be accounted for by such single knock-ons.

Cloud-chamber photographs taken underground at a depth of 26 m w.e. and at sea level under a filter of 1 metre lead have been examined and the number of photographs showing single electrons produced in 1, 2, 3, etc., plates determined. The results are given in the Table. In both experiments the incident particles are essentially  $\mu$ -mesons. Production in the first 5 plates only has been noted since the electrons produced

Assuming that the production of secondaries is completely independent, the expected number of photographs showing 2 single knock-on electrons (2 K.O.) is, using the usual notation

$$N(2 \text{ k.o.}) = N^5 C_2 \epsilon^2 (1 - \epsilon)^3$$

and similarly

$$N(3 \text{ k.o.}) = N^5 C_3 \epsilon^3 (1 - \epsilon)^2$$

where  $N$  is the total number of photographs showing penetrating mesons.

Taking both sets of results together the ratio of observed to expected number of (2 k.o.) events is

$$0.91 \pm 0.14.$$

In the case of counters separated by lead slats, small electron showers and photon-induced showers will presumably be responsible for an important fraction of the e.s. events but the independence, or otherwise, of these processes would be expected to be similar to that of single electrons so that comparison can still be made between the cloud chamber and counter experiments.

In conclusion, it seems unlikely that any appreciable degree of dependence of production of electron secondaries exists. The figures of  $2.3 \pm 0.4$  found by AMALDI *et al.* is therefore possibly due to a large statistical fluctuation.

<sup>(3)</sup> H. J. J. BRADDICK, W. F. NASH and A. W. WOLFENDALE: *Phil. Mag.*, **42**, 1277 (1951).

<sup>(4)</sup> B. LEONTIC and A. W. WOLFENDALE: *Phil. Mag.*, **43**, 1335 (1952).

## Sul fattore di utilizzazione termica ed il tratto di diffusione termico in una pila eterogenea.

S. GALLONE

*Istituto di Scienze Fisiche dell'Università e Laboratori CISE - Milano*

(ricevuto il 8 Settembre 1953)

Ci si propone, in un caso di geometria assai semplice, di dedurre la condizione di criticità di una pila partendo dalle equazioni di diffusione valide entro le singole celle. Tale deduzione presenta un certo interesse, poichè consente di definire e calcolare, nell'approssimazione della teoria elementare della diffusione, il tratto di diffusione termico ed il fattore di utilizzazione termica in un mezzo moltiplicante eterogeneo finito.

Si consideri una « pila » infinitamente estesa nelle direzioni  $x$  e  $y$  di una terna cartesiana ortogonale, e limitata nella direzione  $z$  da due piani normali all'asse  $z$ . Questa pila sia costituita da infinite celle piane (eguali tra di loro) con giacitura parallela al piano  $x = 0$ . Si indichino rispettivamente con  $a$  e  $b$  il semispessore degli strati di uranio e delle celle. Il piano  $x = 0$  coincida inoltre con il piano mediano di una cella.

Indicando ora con  $\Phi(x, z)$  il flusso neutronico in un generico punto della pila, si ponga:

$$(1) \quad \Phi(x, z) = n(z)\varphi(x),$$

e si assuma inoltre che  $n(x)$  soddisfi all'equazione

$$(2) \quad \frac{d^2 n}{dz^2} + \omega^2 n = 0,$$

e sia soggetta ad annullarsi sul contorno della pila.

La funzione periodica  $\varphi(x)$  (periodo  $2b$ ) sia indicata con  $\varphi_0(x)$  quando il punto  $x$  appartiene all'uranio e con  $\varphi_1(x)$  quando  $x$  appartiene al moderatore.

Quale funzione di sorgente  $S$  dei neutroni termici si assuma:

$$(3) \quad S = \begin{cases} 0, & \text{in uranio,} \\ \frac{\eta \epsilon p}{2(b-a)} \int_{-a}^{+a} \varphi_0(x) dx \cdot \exp[\tau \nabla^2] n(z), & \text{nel moderatore.} \end{cases}$$



ove  $\Sigma_0$  è la sezione d'urto termica macroscopica di cattura dell'uranio,  $\tau$  l'età di Fermi dei neutroni di scissione,  $\varepsilon$  il fattore di moltiplicazione veloce,  $\eta$  il numero di neutroni veloci di scissione prodotti per ogni neutrone termico catturato in uranio e  $p$  il fattore di trasparenza alle risonanze.

La scelta di (3) quale funzione di sorgente, è fondata sulle seguenti ipotesi:

1) i neutroni termici nascono nel solo moderatore;

2) l'influenza delle variazioni locali della funzione di sorgente dei neutroni veloci è trascurabile ai fini del computo della funzione di sorgente dei neutroni termici.

Indicando con  $D_0$  e  $D_1$  i coefficienti di diffusione in uranio e moderatore rispettivamente, con  $\Sigma_1$  la sezione d'urto termica macroscopica di cattura del moderatore e tenendo conto della (2) e della (3), le equazioni di diffusione in uranio e moderatore si possono scrivere rispettivamente nel seguente modo:

$$(4) \quad D_0 \left( \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} - \omega^2 \varphi_0 \right) - \Sigma_0 \varphi_0 = 0,$$

$$(5) \quad D_1 \left( \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - \omega^2 \varphi_1 \right) - \Sigma_1 \varphi_1 + \frac{\eta \varepsilon p \Sigma_0}{2(b-a)} \int_{-a}^{+a} \varphi_0(x) dx \cdot \exp[-\tau \omega^2] = 0,$$

con le condizioni al contorno:

$$(6) \quad \begin{cases} D_0 \frac{d\varphi_0}{dx} = D_1 \frac{d\varphi_1}{dx} & \text{in } -a \text{ e } +a; \\ \varphi_0 = \varphi_1 & \text{in } -a \text{ e } +a, \end{cases}$$

$$(7) \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = 0 \quad \text{in } -b \text{ e } +b.$$

Il sistema integro-differenziale delle (4) e (5), soggetto alle condizioni (6) e (7), ammette una soluzione solamente quando  $\omega$  assume un determinato valore.

Integrando la (4) nell'intervallo  $(-a, +a)$  e la (5) negli intervalli  $(-b, -a)$  e  $(+a, +b)$ , sommando e tenendo conto delle condizioni al contorno (6) e (7), si ricava:

$$(8) \quad 1 + \omega^2 L^2(\omega^2) - \eta \varepsilon p f(\omega^2) \exp[-\tau \omega^2] = 0,$$

ove  $L(\omega^2)$  (tratto di diffusione termico) e  $f(\omega^2)$  (fattore di utilizzazione termica) sono dati da:

$$(9) \quad f(\omega^2) = \frac{\Sigma_0 \bar{\varphi}_0}{\Sigma_0 \bar{\varphi}_0 + \Sigma_1 \bar{\varphi}_1},$$

$$(10) \quad L^2(\omega^2) = \frac{D_0 \bar{\varphi}_0 + D_1 \bar{\varphi}_1}{\Sigma_0 \bar{\varphi}_0 + \Sigma_1 \bar{\varphi}_1} = \frac{D_1}{\Sigma_1} [1 - f(\omega^2)] + \frac{D_0}{\Sigma_0} f(\omega^2),$$

nelle quali si è posto:

$$\bar{\varphi}_0 = \int_{-a}^{+a} \varphi_0(x) dx \quad \text{e} \quad \bar{\varphi}_1 = 2 \int_a^b \varphi_1(x) dx.$$

$f(\omega^2)$  si calcola facilmente a partire dalle (4) e (5) medesime e relative condizioni al contorno. Si trova:

$$(11) \quad \frac{1}{f(\omega^2)} = 1 - \frac{D_0 k_0^2 \Sigma_1}{D_1 k_1^2 \Sigma_0} + \frac{\Sigma_1 (b-a)}{\Sigma_0 a} k_0 a \coth k_0 a + \frac{D_0 k_0^2 \Sigma_1}{D_1 k_1^2 \Sigma_0} k_1 (b-a) \coth k_1 (b-a),$$

ove si è posto:

$$k_0 = \sqrt{\frac{\Sigma_0}{D_0} + \omega^2} \quad \text{e} \quad k_1 = \sqrt{\frac{\Sigma_1}{D_1} + \omega^2}.$$

La (8), nella quale  $L^2(\omega^2)$  e  $f(\omega^2)$  sono ora funzioni note di  $\omega^2$ , è la condizione di integrabilità del sistema delle (4) e (5) con le condizioni al contorno specificate. Affinchè detto sistema ammetta una soluzione occorre che  $\omega$  sia radice dell'equazione trascendente (8). La (8) esprime altresì la condizione di criticità della pila in istudio e differisce dalla condizione di criticità di uso solito per la dipendenza di  $f$  e di  $L^2$  da  $\omega$ .

Nel limite di  $\omega$  tendente a zero, cioè per una pila infinita, si ha dalla (10)

$$(12) \quad L^2(0) = L_1^2[1 - f(0)] + L_0^2 f(0),$$

ove si è posto  $L_0^2 = D_0/\Sigma_0$  e  $L_1^2 = D_1/\Sigma_1$ . La (12) differisce dalla formula generalmente assunta per  $L^2$  per la presenza del termine  $L_0^2 f(0)$  che ha tuttavia, in pratica, scarsissimo peso.

Qualora il calcolo del tratto di diffusione termico relativo alla pila a celle piane qui studiata si esegua sulla falsariga dei lavori di PLASS <sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>, si giunge ad una formula che è in buon accordo qualitativo col risultato trovato dal citato Autore per la pila a celle « sferiche » ma che differisce tuttavia sensibilmente dalla (12).

Tale differenza è probabilmente da ascrivere alla ragione che segue: nei lavori di PLASS il tratto di diffusione termico è calcolato a partire dalla formula

$$(13) \quad L^2(\omega^2) = \frac{\varepsilon \eta p f^*(\omega^2)}{\omega^2} \left[ \frac{f(0)}{f^*(\omega^2)} - 1 \right] + \text{termini in } \omega^2 \text{ e di ordine superiore,}$$

ove  $f^*(\omega^2)$  è definito come numero di neutroni catturati in uranio per ogni neutrone termico nascente nella cella.

$f^*(\omega^2)$  differisce da  $f(\omega^2)$ , che è definito come numero di neutroni catturati in uranio per ogni neutrone catturato nella cella, salvo nel caso  $\omega = 0$  in cui è nulla la fuga di neutroni al contorno della cella.

Nel limite di pila critica infinita, essendo in questo caso  $\varepsilon \eta p f^*(0) = 1$ , si può scrivere:

$$(14) \quad L^2(0) = \lim_{\omega^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{f(0)}{f^*(\omega^2)} - 1 \right].$$

La formula (12) non è in accordo con la (14) bensì con

$$(15) \quad L^2(0) = \lim_{\omega^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{f(\omega^2)}{f^*(\omega^2)} - 1 \right],$$

che si può dedurre dalle (4) e (5).

(1) G. N. PLASS: Rapporto CP-992 del Metallurgical Laboratory, Chicago, Illinois (1943).

(2) G. N. PLASS: *Journ. Appl. Phys.*, **23**, 621 (1952).

---

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

---